Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
Section des Sciences, 8^{me} série t. VII. n° 2.

STIRLINGS INTERPOLATIONSRÆKKE

AF

N. E. NØRLUND

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, VII. 2.

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Pris: 4 Kr. 50 Øre.

STIRLINGS INTERPOLATIONSRÆKKE

AF

N. E. NØRLUND

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, VII. 2.

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

1. I denne Afhandling skal vi undersøge den Stirlingske Interpolationsrække

$$F(z) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a'_n z)\, z\,(z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - n^2)$$

og den dermed beslægtede Besselske Række

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a'_n z) \left(z^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right) \left(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2\right) \ldots \left(z^2 - (n - \tfrac{1}{2})^2\right).$$

Disse to Rækker spiller baade i Interpolationsregningen og ved Studiet af Differensligningernes Løsninger en betydelig Rolle, det vil derfor være af Interesse at studere deres Egenskaber nøjere og navnlig at undersøge Betingelserne for at de konvergerer. I et tidligere Arbejde[1] har jeg betragtet Rækkernes Restled og derved afledt tilstrækkelige Konvergensbetingelser. I en senere Afhandling[2] har jeg derefter undersøgt hvilke Betingelser Funktionen $F(z)$ nødvendigvis maa tilfredsstille for at Rækkerne kan konvergere. Disse Betingelser, der kun adskiller sig meget lidt fra de før nævnte tilstrækkelige Betingelser, kan formuleres saaledes: $F(z)$ skal være en hel Funktion, som tilfredsstiller Ulighederne

$$|F(z) - F(-z)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_1} \varepsilon_1(r),$$

$$|F(z) + F(-z)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_2} \varepsilon_2(r),$$

hvor $z = re^{iv}$, og hvor $\varepsilon_1(r)$ og $\varepsilon_2(r)$ betegner Funktioner, som konvergerer ligelig mod Nul, naar $r \to \infty$. $\psi(v)$ er en kontinuert Funktion af v, og β_1 og β_2 betegner Størrelser, som er konstante inden for visse Vinkelrum, men som ændrer deres Værdier i Nærheden af visse singulære Vektorer. Det vanskelige Punkt ved Problemet bestaar i at bestemme de bedst mulige Værdier for β_1 og β_2. Specielt finder man, hvis det er den Stirlingske Række, det drejer sig om, at for positive Værdier af z gælder Ulighederne

[1] Det kgl. danske Vidensk. Selsk. math.-fys. Meddelelser IV (1922) Nr. 3; Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922), p. 343—403.

[2] Bull. Soc. math. France 52 (1924), p. 114—132.

$$|F(z)-F(-z)| < (1+\sqrt{2})^{2x} z^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1(z),$$
$$|F(z)+F(-z)| < (1+\sqrt{2})^{2x} z^{\frac{3}{2}} \varepsilon_2(z).$$

Det Bevis, jeg har givet for disse Uligheder, er meget omstændeligt, og det kan næppe i nævneværdig Grad simplificeres. Jeg skal derfor i denne Afhandling benytte en helt anden Fremgangsmaade, idet jeg først viser, at $F(z)$ kan fremstilles ved visse Integraler af Formen

$$\int (t^{2x} \pm t^{-2x}) \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

og derefter af Integralerne afleder de nævnte Majorantværdier for $F(z)$. Da disse Integralfremstillinger spiller en betydelig Rolle for Rækkernes Teori, har jeg ment at burde underkaste dem en nøjere Undersøgelse. I en under Trykning værende Afhandling har A. Uhler[1] foretaget en lignende Undersøgelse, og Læseren vil med Interesse sammenligne Uhler's Resultater med de paa de efterfølgende Sider afledte Sætninger.

Nogle Hjælpesætninger.

2. For at gøre den efterfølgende Bevisførelse mere overskuelig begynder vi med at aflede nogle simple og nærliggende Sætninger, som vi i det følgende vil faa Anvendelse for. Hadamard[2] har bevist følgende

Hjælpesætning 1. Hvis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = 0, \quad \omega > 0, \tag{1}$$

saa vil Rækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

være konvergent for $|z| < 1$, og man har

$$\lim_{|z| \to 1} (1-|z|)^{\omega} f(z) = 0 \tag{3}$$

og det ligeligt for hele Cirklen $|z| = 1$, idet z tænkes at nærme sig til et Punkt paa Eenhedscirklens Periferi fra det indre af denne Cirkel.

Man har nemlig

$$(1-z)^{-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} z^n,$$

hvor

$$\binom{\omega+n-1}{n} = \frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-1)}{n!} = \frac{\Gamma(\omega+n)}{\Gamma(\omega)\,\Gamma(n+1)}.$$

[1] Sur la formule d'interpolation de Stirling, Arkiv för matematik, astronomi och fysik (Stockholm)

[2] Journ. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 74.

Altsaa er

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{\omega+n-1}{n}}{n^{\omega-1}} = \frac{1}{\Gamma(\omega)}.$$

Af (1) følger da at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\binom{\omega+n-1}{n}} = 0.$$

Hvis ε betegner et positivt Tal, saa kan man finde et Tal n_0 saaledes at

$$|a_n| < \varepsilon \binom{\omega+n-1}{n} \tag{4}$$

for $n \geqq n_0$; altsaa er

$$\left| \sum_{n_0}^{\infty} a_n z^n \right| < \varepsilon \sum_{n_0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n$$

$$< \varepsilon \sum_{0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n = \varepsilon (1-|z|)^{-\omega}.$$

Følgelig er

$$(1-|z|)^{\omega} |f(z)| < (1-|z|)^{\omega} \left| \sum_{0}^{n_0-1} a_n z^n \right| + \varepsilon,$$

men ved at vælge $|z|$ tilstrækkelig nær ved 1 kan man gøre det første Led saa lille som man vil, og Sætningen er dermed bevist.

Hjælpesætning 2. Hvis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = A, \quad \omega > 0,$$

saa vil

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{\omega} f(z) = A\Gamma(\omega),$$

naar $z \to 1$ fra det indre af Enhedscirklen langs med en Kurve, der er beliggende mellem to Korder til Enhedscirklen, som skærer hinanden i Punktet 1. Vi betegner for Kortheds Skyld i det følgende en saadan Kurve som en ikke tangerende Kurve.

Ogsaa denne Sætning skyldes Hadamard[1]. Den er desuden tidligere bevist af Appell[2] for radial Tilnærmelse til Punktet 1 og for reelle Værdier af A.

Bevis: Hvis $A = 0$, følger denne Sætning af Hjælpesætning 1, idet $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ forbliver mindre end en Konstant paa en ikke tangerende Kurve[3]. Lad dernæst A

[1] l. c. p. 76—77.

[2] C. R. Acad. Sc. Paris 87 (1878), p. 690; se ogsaa Pringsheim: Sitzungsber. Akad. München 1901, p. 522.

[3] Se Pringsheim l. c. p. 514.

være et fra Nul forskelligt Tal. Af vor Forudsætning følger at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - A\Gamma(\omega)\binom{\omega+n-1}{n}}{n^{\omega-1}} = 0.$$

Da vi nu véd, at Sætningen er rigtig for $A = 0$, saa har man altsaa at

$$\lim_{z \to \infty} (1-z)^{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n - A\Gamma(\omega)\binom{\omega+n-1}{n}\right] z^n = 0.$$

Men da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} z^n = (1-z)^{-\omega},$$

saa er Hjælpesætning 2 dermed bevist. Sætter vi

$$f(z) = (1-z)^{-\omega} \varphi(z)$$

og

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

saa er

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} b_{n-s} \binom{\omega+s-1}{s}.$$

Antagelsen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = A, \qquad \omega > 0$$

medfører altsaa, at

$$\lim_{z \to 1} \varphi(z) = A \cdot \Gamma(\omega),$$

naar $z \to 1$ langs med en ikke tangerende Kurve. Hjælpesætning 2 kan derfor betragtes som en Udvidelse af Frobenius[1] bekendte Grænsesætning. For $\omega = 1$ faar vi den Abelske Grænsesætning. For $\omega = 0$ gælder Sætningen ikke, men Pringsheim[2] har vist, at hvis

$$\lim_{z \to \infty} n a_n = A,$$

saa vil

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(z)}{\log \frac{1}{1-z}} = A,$$

naar $z \to 1$ langs med en ikke tangerende Kurve.

[1] Journ. reine angew. Math. 89 (1880), p. 262.

[2] l. c. p. 522.

Hjælpesætning 3. Hvis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{\omega - 1}} = 0, \qquad \omega > 0,$$

saa vil Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n (1-z)^{\omega}$$

være ligelig konvergent i Intervallet $0 \leqq z \leqq 1$ og overhovedet paa enhver ikke tangerende Kurve, som forbinder et Punkt inden for Enhedscirklen med Punktet 1.

Man kan nemlig finde en Konstant C saaledes at

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < C$$

paa den nævnte Kurve; af Uligheden (4) følger da at

$$\left| \sum_{n_0}^{\infty} a_n z^n (1-z)^{\omega} \right| < C^{\omega} (1-|z|)^{\omega} \varepsilon \sum_{n_0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n$$

$$< C^{\omega} \varepsilon (1-|z|)^{\omega} \sum_{0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n = C^{\omega} \varepsilon$$

q. e. d.

For $\omega = 0$ gælder Sætningen ikke, men hvis

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0,$$

saa vil Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \log^{-1} \frac{1}{1-z}$$

være ligelig konvergent i Intervallet $\frac{1}{2} \leqq z \leqq 1$. Man kan nemlig finde n_0 saaledes at

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{for} \quad n \geqq n_0.$$

Altsaa er

$$\frac{\left| \sum_{n_0}^{\infty} a_n z^n \right|}{\log \frac{1}{1-z}} < \frac{\varepsilon \sum_{n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n}}{\log \frac{1}{1-z}} < \frac{\varepsilon \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}}{\log \frac{1}{1-z}} = \varepsilon.$$

3. Vi vil nu antage, at

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega+1} a_n = 0, \qquad 0 < \omega < 1 \tag{5}$$

Potensrækken (2) er da ligelig konvergent paa Cirklen $|z| = 1$, og $f(z)$ er følgelig endelig og kontinuert paa denne Cirkel. Men vi kan ikke paastaa, at $f(z)$ har en Differentialkvotient paa Cirklen $|z| = 1$. Derimod skal vi vise, at det om ethvert Punkt α paa Enhedscirklens Periferi gælder, at Brøken

$$\frac{f(\alpha) - f(z)}{(\alpha - z)^{\omega}}$$

konvergerer mod Nul, naar $z \to \alpha$ fra det indre af Enhedscirklen langs med en ikke tangerende Kurve, samt at en Middelværdi af denne Brøk konvergerer mod Nul, naar $z \to \alpha$ langs med Enhedscirklen eller langs med en Cirkel som rører denne indvendigt. Det er tilstrækkeligt at vise dette for Punktet $z = 1$. Vi sætter.

$$\sigma_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

Vi kan finde et Tal n_0 saaledes, at

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n^{\omega+1}}, \qquad n \geqq n_0;$$

altsaa er for $n > n_0$

$$|\sigma_{n+1}| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} |a_\nu| < \varepsilon \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\omega+1}}$$

$$< \varepsilon \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\omega+1}} = \frac{\varepsilon}{\omega\, n^{\omega}}.$$

Heraf følger at

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega} \sigma_{n+1} = 0. \tag{6}$$

Man har nu

$$\sum_{n=0}^{m} a_n z^n = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{m} \sigma_n (z^n - z^{n-1}) - \sigma_{m+1} z^m.$$

Hvis $|z| \leqq 1$ faas, naar $m \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sigma_0 + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1} z^n;$$

altsaa er

$$f(1) - f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1} z^n.$$

Anvender vi paa Rækken $\sum \sigma_{n+1} z^n$ Hjælpesætning 2 under Benyttelse af (6), saa ser vi at

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(1) - f(z)}{(1-z)^{\omega}} = 0, \tag{7}$$

naar $z \rightarrow 1$ langs med en ikke tangerende Kurve. Vi sætter nu

$$\frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\omega}} = \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Det er let at udtrykke Koefficienterne b_n ved Koefficienterne a_n. Man har

$$(1-z)^{-\omega} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_0 \binom{\omega+n-1}{n} + a_1 \binom{\omega+n-2}{n-1} + \ldots + a_n \right] z^n,$$

$$(1-z)^{-\omega} f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_0 \binom{\omega+n-1}{n} z^n;$$

altsaa er

$$\frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\sigma_0 \binom{\omega+n-1}{n} + a_0 \binom{\omega+n-1}{n} + \ldots + a_n \right] z^n.$$

Men heraf finder man at

$$\begin{aligned} b_n &= -\sigma_0 \binom{\omega+n-1}{n} + a_0 \binom{\omega+n-1}{n} + a_1 \binom{\omega+n-2}{n-1} + \ldots + a_n \\ &= -\sigma_{n+1} \binom{\omega+n-1}{n} + \sum_{m=1}^{n} a_m \left[-\binom{\omega+n-1}{n} + \binom{\omega+n-m-1}{n-m} \right]. \qquad (8) \end{aligned}$$

Vi vil vise, at $n b_n \rightarrow 0$, naar $n \rightarrow \infty$. Af (6) følger at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \binom{\omega+n-1}{n} \sigma_{n+1} = 0.$$

Vi behøver da blot at betragte det sidste Led i (8). Man har

$$\binom{\omega+n-m-1}{n-m} - \binom{\omega+n-1}{n} =$$

$$= \frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-m-1)}{n!} \left[n(n-1)\ldots(n-m+1) - (n+\omega-1)\ldots(n+\omega-m) \right]$$

$$< \frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-m-1)}{n!} \left[n(n-1)\ldots(n-m+1) - (n-1)(n-2)\ldots(n-m) \right]$$

$$= \frac{m}{n} \frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-m-1)}{(n-m)!}$$

$$= \frac{m}{n} \binom{\omega+n-m-1}{n-m}.$$

Altsaa er

$$\left|\sum_{m=1}^{n} a_m\left[\binom{\omega+n-m-1}{n-m}-\binom{\omega+n-1}{n}\right]\right|$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|m\,a_m|\binom{\omega+n-m-1}{n-m}$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n_0-1}|m\,a_m|\binom{\omega+n-m-1}{n-m}+\frac{\varepsilon}{n}\sum_{m=n_0}^{n}\frac{1}{m^{\omega}}\binom{\omega+n-m-1}{n-m}$$

$$<\frac{n_0\,C\,n^{\omega-1}}{n}+\frac{\varepsilon}{n^{\omega+1}}+\frac{\varepsilon\,C_1}{n}\sum_{m=n_0}^{n-1}\frac{1}{m^{\omega}}(n-m)^{\omega-1}$$

$$<\frac{n_0\,C}{n^{2-\omega}}+\frac{\varepsilon}{n^{\omega+1}}+\frac{\varepsilon\,C_1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\omega-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega}\frac{1}{n},$$

hvor C og C_1 betegner Konstanter. Men

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\omega-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega}\frac{1}{n}=\int_0^1(1-x)^{\omega-1}x^{-\omega}\,dx$$

$$=\Gamma(\omega)\,\Gamma(1-\omega)=\frac{\pi}{\sin\pi\omega}.$$

Da $0<\omega<1$ ser man let, at den sidste Sum har sin absolutte Værdi mindre end en fast Konstant. Vi har dermed vist at

$$\lim_{n\to\infty} n\,b_n = 0.$$

Da nu i følge (7) Grænseværdien

$$\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{9}$$

existerer ved radial Tilnærmelse til $z=1$ og har Værdien Nul, saa maa i Følge en bekendt Sætning, der skyldes TAUBER[1], Rækken $\sum_0^\infty b_n$ være konvergent og have Summen Nul. Da endvidere Rækken $\sum_0^\infty b_n z^n$ har en Grænseværdi ved radial Tilnærmelse til et vilkaarligt Punkt paa Cirklen $|z|=1$, saa er denne Række konvergent overalt paa Cirklen $|z|=1$, men vi kan ikke paastaa, at den konvergerer ligeligt paa denne Cirkel.

[1] Monatshefte f. Math. u. Phys. 8 (1897), p. 273—277.

4. Under Benyttelse af en mere dybtliggende Sætning af LITTLEWOOD kan man erholde et lignende Resultat, hvis man erstatter Antagelsen (5) med den mindre indskrænkende Antagelse

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega+1} a_n = A, \quad o < \omega < 1,$$

hvor A er en vilkaarlig Konstant. Af den Cauchy'ske Grænsesætning

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

følger at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma_n}{\frac{1}{n^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+1)^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+2)^{\omega+1}} + \dots} = A.$$

Nu er

$$\frac{1}{n^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+1)^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+2)^{\omega+1}} + \dots < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\omega+1}} = \frac{1}{\omega\,(n-1)^{\omega}},$$

$$\frac{1}{n^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+1)^{\omega+1}} + \frac{1}{(n+2)^{\omega+1}} + \dots > \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{\omega+1}} = \frac{1}{\omega\, n^{\omega}}.$$

Altsaa er

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\omega+1}} = \frac{1}{\omega}.$$

Følgelig er

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega} \sigma_n = \frac{A}{\omega}.$$

Man har nu

$$\varphi(z) = -(1-z)^{1-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1} z^n.$$

Anvender man Hjælpesætning 2 paa Rækken paa højre Side, saa ser man at

$$\lim_{z \to 1} \varphi(z) = -\frac{A}{\omega} \Gamma(1-\omega) = A\,\Gamma(-\omega),$$

naar $z \to 1$ fra det indre af Enhedscirklen langs med en ikke tangerende Kurve. Det i § 3 anførte Ræsonnement viser nu, at man kan finde en Konstant C saaledes at

$$|n\, b_n| < C$$

for alle n. En berømt Sætning af LITTLEWOOD[1] tillader os heraf at slutte, at Rækken $\sum b_n$ er konvergent, og at

[1] Proc. Lond. math. Soc. (2) 9 (1910), p. 438.

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n = A\,\Gamma(-\omega).$$

Endvidere følger som ovenfor, at $\sum_{0}^{\infty}{}' b_n z^n$ er konvergent overalt paa Cirklen $|z| = 1$. Men ud fra disse Resultater kan man ved Hjælp af en anden Sætning, der skyldes Hardy[1] og Littlewood[1], straks slutte, at

$$\frac{1}{1-z}\int_z^1 \varphi(t)\,dt \to \sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n,$$

naar $z \to 1$ langs med en vilkaarlig regulær Kurve, der er beliggende helt inden for Enhedscirklen, eller langs med selve Cirklen $|z| = 1$. Vi har dermed bevist følgende

Hjælpesætning 4. *Hvis*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$$

hvor

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega+1} a_n = A, \tag{10}$$

og $0 < \omega < 1$, *saa kan* $f(z)$ *skrives paa Formen*

$$f(z) = f(1) + (1-z)^{\omega}\,\varphi(z),$$

hvor

$$\lim_{z\to 1} \varphi(z) = A\,\Gamma(-\omega),$$

naar $z \to 1$ *langs med en ikke tangerende Kurve, medens*

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z}\int_z^1 \varphi(t)\,dt = A\,\Gamma(-\omega),$$

naar $z \to 1$ *langs med Cirklen* $|z| = 1$ *eller langs med en regulær Kurve, der ligger helt inden for denne Cirkel.*

Hvis $p < \omega < p+1$, hvor p er et helt positivt Tal, saa medfører Betingelsen (10), at $f(z)$ kan skrives paa Formen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p}{}' \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + (1-z)^{\omega}\,\varphi(z),$$

hvor $\varphi(z) \to A\,\Gamma(-\omega)$, naar $z \to 1$ uden at overskride Enhedscirklen. Dette følger straks af Hjælpesætning 4, naar man anvender denne paa $f^{(p)}(z)$ og benytter Relationen

[1] Proc. London math. Soc. (2) 18 (1917), p. 210, Theorem T.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + \frac{1}{(p-1)!}\int_1^z f^{(p)}(t)(z-t)^{p-1}\,dt.$$

5. Jeg overgaar dernæst til at aflede en interessant Rækketransformation, som er analog med den bekendte Eulerske Transformation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\triangle} F(o)}{(t-1)^{n+1}}.$$

Lad $F(z)$ betegne en Funktion, der kan fremstilles ved Stirlings Interpolationsrække

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \overset{2n}{\triangle} F(-n)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!} \nabla \overset{2n+1}{\triangle} F(-n-1). \tag{11}$$

For meget store positive Værdier af z har man da, som allerede nævnt, at

$$\left.\begin{aligned} |F(z)-F(-z)| &< (1+\sqrt{2})^{2z} z^{\frac{1}{2}} \varepsilon(z), \\ |F(z)+F(-z)| &< (1+\sqrt{2})^{2z} z^{\frac{3}{2}} \varepsilon(z), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

hvor $\varepsilon(z) \to 0$, naar $z \to \infty$. Vi vil i det følgende ofte komme til at betragte den frembringende Funktion til $F(z)$, det vil sige Rækken

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{2n}}.$$

Denne Række er aabenbart konvergent uden for Cirklen $|t| = 1+\sqrt{2}$, og den vil i Almindelighed være divergent inden for denne Cirkel. Det vil for os navnlig komme an paa at undersøge, hvorledes $\varphi(t)$ forholder sig i et vist Omraade, der ligger helt uden for Rækkens Konvergensomraade. For at indse, at $\varphi(t)$ kan fortsættes analytisk ud i dette Omraade, vil vi transformere vor Række efter faldende Potenser af t til en Række efter faldende Potenser af $t-\frac{1}{t}$. Koefficienterne i den transformerede Potensrække bliver derved de samme som Koefficienterne i den Stirlingske Række.

Lad n være et helt positivt Tal. Vi begynder med at udvikle Funktionen t^{-2n} efter faldende Potenser af $t-\frac{1}{t}$. Den Lagrangeske Række giver os de to følgende bemærkelsesværdige Udviklinger

$$\frac{1}{t^{2n}} = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{n}{s} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s}}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{t^{2n}} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=n}^{\infty} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}}. \tag{13*}$$

Disse to Rækker konvergerer i Omraadet $\left|\frac{2}{t - \frac{1}{t}}\right| < 1$, det vil sige i det Omraade, som ligger helt uden for de to Cirkler $|t \mp 1| = \sqrt{2}$, samt i det Omraade, som ligger inden for begge Cirkler. I det førstnævnte Omraade fremstiller Rækkerne Funktionen paa venstre Side, men i det sidstnævnte Omraade fremstiller den første Række Funktionen t^{2n} og den sidste Række Funktionen $-t^{2n}$, som man let ser ved at ombytte t med $\frac{1}{t}$.

Man kan forøvrigt let verificere Rigtigheden af disse Formler paa følgende Maade. Sætter man

$$t = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1},$$

hvor $\sqrt{\xi^2 + 1}$ er positiv for positive Værdier af ξ, saa er

$$\frac{1}{t} = -\xi + \sqrt{\xi^2 + 1},$$

$$t - \frac{1}{t} = 2\xi.$$

Altsaa har man

$$t^{-2n} = \xi^{2n} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}\right)^{2n}.$$

Højre Side er en Funktion af ξ, som er regulær uden for Cirklen $|\xi| = 1$; den kan altsaa udvikles efter faldende Potenser af ξ. Binomialformlen giver os

$$t^{-2n} = \xi^{2n} \sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{2n}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\nu}{2}},$$

$$\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\nu}{2}} = \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2s+2)}{2^s \cdot s!\ \xi^{2s}}, \quad |\xi| > 1.$$

Indsætter vi den sidste Række i den foregaaende Formel, finder vi

$$t^{-2n} = \xi^{2n} \sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{2n}{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2s+2)}{2^s s!\, \xi^{2s}}$$

$$= \xi^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s s!\, \xi^{2s}} \sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{2n}{\nu} \nu(\nu-2)\ldots(\nu-2s+2). \tag{14}$$

Men dette Udtryk kan reduceres. Sætter vi

$$f_s(x) = x(x-2)(x-4)\ldots(x-2s+2),$$

saa er

$$\overset{2n}{\triangle} f_s(0) = \sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{2n}{\nu} \nu(\nu-2)\ldots(\nu-2s+2).$$

Men da $f_s(x)$ er et Polynomium i x af Graden s, saa bliver denne Differens Nul for $s < 2n$. Rækken (14) kan altsaa skrives saaledes

$$t^{-2n} = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} f_{s+n}(0)}{2^{s+n}(s+n)!\, \xi^{2s}},$$

hvor t skal være beliggende uden for de to Cirkler $|t \pm 1| = \sqrt{2}$. Men hvis $s \geqq n$, saa viser man let ved Induktion, at

$$\overset{2n}{\triangle} f_{s+n}(0) = (-1)^{s+n} 2^{n-s} \frac{n}{s} \frac{(2s)!}{(s-n)!},$$

og indsætter man dette i den sidste Række, saa genfinder man Rækken (13). Heraf afleder man atter let (13*).

Vi vil nu betragte Rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) \pm F(-n)}{t^{2n}},$$

som i Følge (12) er konvergente for $|t| > 1 + \sqrt{2}$. Vi vil bevise, at disse to Rækker fremstiller to Funktioner af t, som er regulære i hele det Omraade, som ligger uden for Cirklerne $|t \mp 1| = \sqrt{2}$. Af (13) følger nemlig, hvis $|t| > 1 + \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) - F(-n)}{t^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F(n) - F(-n)\right) \sum_{s=n}^{\infty} \frac{n}{s} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{s}{n} \binom{2n}{s+n} \left(F(s) - F(-s)\right).$$

Nu er

$$\overset{2n-1}{\triangle} F(-n) = \sum_{s=0}^{2n-1} (-1)^{s-1} \binom{2n-1}{s} F(s-n)$$

altsaa

$$2 \nabla \overset{2n-1}{\triangle} F(-n) = \sum_{s=0}^{2n} (-1)^{s} \binom{2n}{s} \frac{s-n}{n} F(s-n)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \binom{2n}{s+n} \frac{s}{n} \left(F(s) - F(-s)\right).$$

Altsaa har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) - F(-n)}{t^{2n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla \overset{2n-1}{\triangle} F(-n)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}}. \tag{15}$$

Da Rækken (11) i Følge Antagelse konvergerer, saa maa det n^{te} Led aftage mod Nul, naar $n \to \infty$, det vil sige at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nabla \overset{2n-1}{\triangle} F(-n)}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} F(-n)}{2^{2n} n^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Af den første af disse Ligninger slutter man straks, at Rækken paa højre Side i (15) er konvergent, hvis $\left|t - \frac{1}{t}\right| > 2$, altsaa i Særdeleshed i det Omraade, der ligger uden for begge Cirklerne $|t \mp 1| = \sqrt{2}$, og i dette Omraade giver den os altsaa en analytisk Fortsættelse af den ved Rækken paa venstre Side definerede Funktion. Rækken paa højre Side er desuden konvergent i det Omraade, der ligger inden for begge Cirklerne $|t \mp 1| = \sqrt{2}$, men intet tillader os at paastaa, at den her fremstiller samme Funktion som uden for Cirklerne.

Af (13*) afleder vi paa samme Maade for $|t| > 1 + \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) + F(-n)}{t^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F(n) + F(-n)\right) \sum_{s=n}^{\infty} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}} \left(t + \frac{1}{t}\right)$$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \binom{2n}{s+n} \left(F(s) + F(-s)\right).$$

Men

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \binom{2n}{s+n} \left(F(s) + F(-s)\right) = \sum_{s=-n}^{s=+n} (-1)^{s+n} \binom{2n}{s+n} F(s) - (-1)^{n} \binom{2n}{n} F(0)$$

$$= \overset{2n}{\triangle} F(-n) - (-1)^{n} \binom{2n}{n} F(0).$$

Følgelig er

$$F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)+F(-n)}{t^{2n}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{2n}{\triangle}F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}, \tag{15*}$$

og den sidste Række er ligeledes konvergent uden for de to Cirkler $|t\mp 1| = \sqrt{2}$. Ved at multiplicere begge Sider af (15) med $t\pm\frac{1}{t}$ og erstatte $\nabla F(-n)$ med $F\left(-n+\frac{1}{2}\right)$ erholder man endelig

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F\left(n+\frac{1}{2}\right)-F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{t^{2n+1}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{2n-1}{\triangle}F\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}, \tag{16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F\left(n+\frac{1}{2}\right)+F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{t^{2n+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nabla\overset{2n}{\triangle}F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}. \tag{16*}$$

Ved at addere (15) og (15*) ledvis finder man efter en simpel Reduktion

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F(n)}{t^{2n}}=t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{2n}{\triangle}F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{2n-1}{\triangle}F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}},$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{t^{2n}}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{2n}{\triangle}F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{2n-1}{\triangle}F(-n+1)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}.$$

Integralfremstillinger for Stirlings Række.

6. Lad os i Stirlings Række (11) specielt sætte $F(z) = t^{2z}$. Da

$$\overset{n}{\triangle}t^{2z}=t^{2z}(t^2-1)^n,$$

saa finder man

$$t^{2z}+t^{-2z}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}, \tag{17}$$

$$t^{2z}-t^{-2z}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}. \tag{17*}$$

I Fig. 1 fremstiller *ABCDA* en Cirkel med Centrum i Punktet -1 og Radius $\sqrt{2}$, og *AECFA* fremstiller en Cirkel med Centrum i Punktet $+1$ og med Radius $\sqrt{2}$.

Rækkerne (17) og (17*) er konvergente og fremstiller de paa venstre Side anførte Funktioner[1], naar t ligger i det skraverede Omraade til højre, som er begrænset af Cirkelbuerne ABC og CFA. Vi sætter

$$t = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1},$$

da er

$$\frac{1}{t} = -\xi + \sqrt{\xi^2 + 1},$$

$$t - \frac{1}{t} = 2\xi.$$

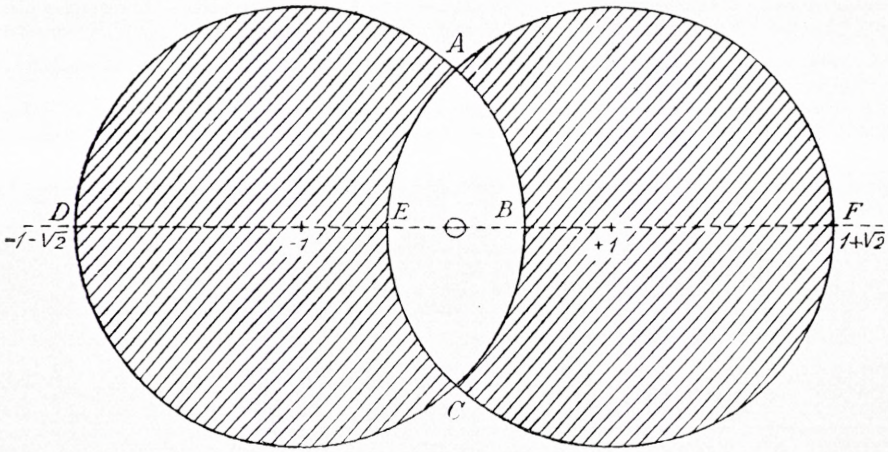

Fig. 1.

Altsaa har vi

$$\frac{t^{2z} + t^{-2z}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}} = \frac{\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right)^{2z} + \left(-\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right)^{2z}}{(2\xi)^{2n+1}}.$$

Men i Følge (17) er dette en Funktion af ξ, som i Punktet $\xi = 0$ har en Pol med Residuet

$$\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}.$$

Altsaa er

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right)^{2z} + \left(-\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right)^{2z}}{(2\xi)^{2n+1}}\, d\xi = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}, \qquad (18)$$

hvor Integrationsvejen er en lille i positiv Omløbsretning gennemløbet lukket Kurve omkring $\xi = 0$. Denne Ligning kan ogsaa skrives

$$\frac{1}{4\pi i}\int \frac{t^{2z} + t^{-2z}}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\, d\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}, \qquad (18^*)$$

[1] Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922) p. 375—376.

hvor Integrationsvejen i t-Planen er en lille lukket Kurve omkring $t = 1$ gennemløbet i positiv Omløbsretning. I (18) kan vi deformere Integrationsvejen til den bliver lig med Cirklen $|\xi| = 1$. I (18*) bliver da den tilsvarende Integrationsvej Kurven $CFABC$. Men ved at erstatte t med $\frac{1}{t}$ faar vi det to Gange gennemløbne Integral taget langs med Cirkelbuen CFA. Altsaa er

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{CFA} \frac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}, \quad n \geqq 0. \tag{19}$$

Af (17*) faar vi paa samme Maade

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{CFA} \frac{t^{2z}-t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}\frac{dt}{t} = \frac{z(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n-1)!}, \quad n > 0. \tag{19*}$$

7. Heraf kan vi nu let aflede en Integralfremstilling for enhver Funktion $F(z)$ der kan fremstilles ved Stirlings Række. Af (11) følger at

$$F(z)-F(-z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!}\,\nabla\overset{2n+1}{\triangle}F(-n-1)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(n!)^2}, \tag{20}$$

$$F(z)+F(-z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}\overset{2n}{\triangle}F(-n)$$

$$= 2F(0)+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_n\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(n!)^2}, \tag{20*}$$

hvor

$$\alpha_n = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\,\nabla\overset{2n+1}{\triangle}F(-n-1),$$

$$\beta_n = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}\,\overset{2n+2}{\triangle}F(-n-1).$$

Hvis Rækkerne (20) og (20*) konvergerer for en ikke heltallig Værdi af z, saa konvergerer de ligelig i ethvert endeligt Omraade[1]. Vi kan derfor differentiere med Hensyn til z og de derved fremkomne Rækker maa ogsaa konvergere ligelig. Differentierer vi i (20) én Gang og i (20*) to Gange med Hensyn til z og sætter derefter $z = 0$, saa faar vi

[1] Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922), p. 347—348.

$$F'(0) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n,$$

$$\frac{1}{2} F''(0) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \beta_n.$$

Den Stirlingske Rækkes Konvergens medfører altsaa, at Rækkerne $\sum \alpha_n$ og $\sum \beta_n$ konvergerer. Sætter vi

$$G_1(z) = \frac{F(z) - F(-z)}{2z}, \qquad G_2(z) = \frac{F(z) + F(-z) - 2F(0)}{2z^2},$$

saa er

$$G_1(0) = F'(0), \qquad G_2(0) = \frac{1}{2} F''(0),$$

og Rækkerne (20) og (20*) kan skrives saaledes

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n \alpha_n \frac{(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(n!)^2},$$

$$G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n \beta_n \frac{(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(n!)^2}.$$

Anvender vi Abels partielle Summation paa disse to Rækker faar vi

$$G_1(z) = G_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z^2 (z^2-1^2)\dots\left(z^2-(n-1)^2\right) \sum_{\nu=n}^{\infty}{}' \alpha_\nu, \tag{21}$$

$$G_2(z) = G_2(0) + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z^2 (z^2-1^2)\dots\left(z^2-(n-1)^2\right) \sum_{\nu=n}^{\infty}{}' \beta_\nu. \tag{21*}$$

For nu at finde et Integraludtryk for $F(z)$ saa vil vi begynde med at betragte de to følgende hele Funktioner af z

$$H_1(z) = \frac{G_1(z) - G_1(0)}{z} = \frac{F(z) - F(-z) - 2zF'(0)}{2z^2}, \tag{22}$$

$$H_2(z) = \frac{G_2(z) - G_2(0)}{z} = \frac{F(z) + F(-z) - 2F(0) - z^2F''(0)}{2z^3}. \tag{22*}$$

Af (21) og (21*) afleder vi

$$H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right) \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!} \overset{2n+1}{\triangle} H_1(-n)\,, \tag{23}$$

$$H_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right) \sum_{\nu=n}^{\infty} \beta_\nu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!} \overset{2n+1}{\triangle} H_2(-n)\,. \tag{23*}$$

Ved Sammenligning af Koefficienterne ser man at

$$\overset{2n-1}{\triangle} H_1(-n+1) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu\,,$$

$$\overset{2n-1}{\triangle} H_2(-n+1) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \beta_\nu\,.$$

Men da $\sum \alpha_\nu$ og $\sum \beta_\nu$ er konvergente Rækker, og da $H_1(z)$ og $H_2(z)$ er ulige Funktioner af z, saa følger heraf at

$$\nabla \overset{2n-1}{\triangle} H_1(-n) = \frac{2^{2n}\varepsilon_1(n)}{n^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{24}$$

$$\nabla \overset{2n-1}{\triangle} H_2(-n) = \frac{2^{2n}\varepsilon_2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{24*}$$

hvor $\varepsilon_1(n)$ og $\varepsilon_2(n)$ konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Rækkerne

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla \overset{2n-1}{\triangle} H_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}\,, \tag{25}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla \overset{2n-1}{\triangle} H_2(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}} \tag{25*}$$

er altsaa absolut og ligelig konvergente paa Periferien af Cirklerne $\left|t-\frac{1}{t}\right| = 2.$

Ved ledvis Integration finder man da under Benyttelse af (19*) at

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{CFA} (t^{2z} - t^{-2z})\, \varphi_1(t) \frac{dt}{t}, \tag{26}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{CFA} (t^{2z} - t^{-2z})\, \varphi_2(t) \frac{dt}{t}, \tag{26*}$$

og disse Integraler konvergerer for alle Værdier af z. Man kan ogsaa aflede Integraludtryk for $G_1(z)$ og $G_2(z)$. Da disse Funktioner i Følge (21) og (21*) kan fremstilles ved Stirlings Række, saa har man

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \overset{2n}{\triangle} G_1(-n), \tag{27}$$

$$G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \overset{2n}{\triangle} G_2(-n), \tag{27*}$$

hvor

$$\overset{2n}{\triangle} G_1(-n) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu = \frac{2^{2n} \varepsilon_1(n)}{n^{\frac{1}{2}}}, \tag{28}$$

$$\overset{2n}{\triangle} G_2(-n) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \beta_\nu = \frac{2^{2n} \varepsilon_2(n)}{n^{\frac{1}{2}}}. \tag{28*}$$

Af de sidste Udtryk følger, at Rækkerne

$$g_1(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} G_1(-n)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}}, \tag{29}$$

$$g_2(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} G_2(-n)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}} \tag{29*}$$

er konvergente for $\left| t - \frac{1}{t} \right| > 2$, derimod vil disse Rækker i Almindelighed ikke konvergere paa Periferien af vore to Cirkler. Vi kan derfor ikke benytte samme Integrationsvej som i (26). Men lad (Fig. 2) CF_1A betegne en Cirkelbue, som forbinder Punktet $-i$ med Punktet $+i$, og som har Centrum i et Punkt $t = a$, hvor $a > 1$. Da vil i Følge Hjælpesætning 3 Rækkerne (29) og (29*) være ligelig konvergente paa Cirkelbuen CF_1A. Ved ledvis Integration af disse Rækker finder jeg derfor under Benyttelse af (19) at

$$G_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,g_1(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{30}$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,g_2(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{30*}$$

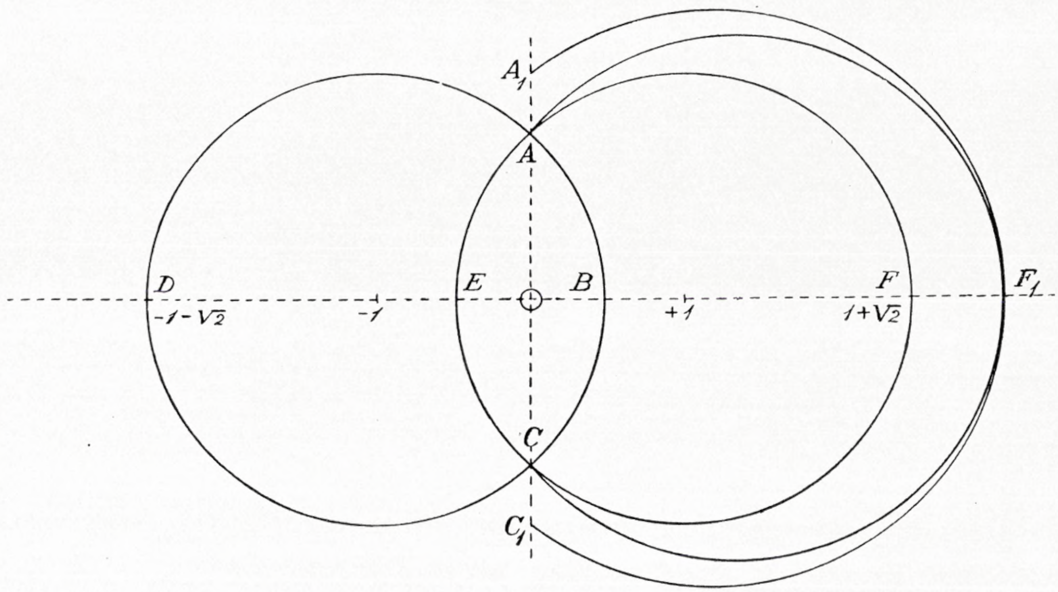

Fig. 2.

Af (15*) og (15) følger, at Funktionerne $g(t)$ og $\varphi(t)$ ogsaa kan fremstilles ved følgende Rækker

$$g_1(t) = G_1(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_1(n)}{t^{2n}}, \tag{31}$$

$$g_2(t) = G_2(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_2(n)}{t^{2n}}, \tag{31*}$$

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_1(n)}{t^{2n}}, \tag{32}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_2(n)}{t^{2n}}, \tag{32*}$$

men disse Rækker konvergerer blot for $|t| > 1+\sqrt{2}$. Ved Differentiation af (32) faar man under Benyttelse af (22)

$$\varphi_1'(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_1(n)-G_1(0)}{t^{2n+1}}$$

$$= -\frac{g_1(t)}{t} + G_1(0)\,\frac{t^2+1}{t\,(t^2-1)}\,.$$

Man ser heraf, at man ogsaa kan aflede (30) af (26). Deformerer man nemlig i (26) Integrationsvejen til Cirkelbuen CF_1A, og integrerer man derefter per partes, saa finder man, idet $\varphi_1(t)$ er en lige Funktion af t

$$\frac{G_1(z)-G_1(0)}{z} = \frac{-1}{2\pi i z}\int_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,\varphi_1'(t)\,dt\,;$$

men det lige fundne Udtryk for $\varphi_1'(t)$ viser, at denne Formel kan reduceres til (30).

Anvender man Hjælpesætning 2 paa (29) og (29*), saa ser man, at $g_1(t)$ og $g_2(t)$ konvergerer mod Nul, naar $t \rightarrow \pm i$ langs med Cirkelbuen CF_1A. Man kan derfor i (30) og (30*) integrere per partes, og man finder derved

$$G_1(z) = \frac{-1}{4\pi i z}\int_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})\,g_1'(t)\,dt\,, \tag{33}$$

$$G_2(z) = \frac{-1}{4\pi i z}\int_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})\,g_2'(t)\,dt. \tag{33*}$$

Sætter man

$$f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)-F(-n)}{t^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{2n-1}{\nabla\,\triangle}\,F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}\,, \tag{34}$$

$$f_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)+F(-n)-2F(0)}{n\,t^{2n}}\,, \tag{34*}$$

og erindrer at

$$G_1(z) = \frac{F(z)-F(-z)}{2z}\,,\qquad G_2(z) = \frac{F(z)+F(-z)-2F(0)}{2z^2}\,, \tag{35}$$

saa finder man ved Differentiation af (31) og (31*) at

$$g_1'(t) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,G_1(n)}{t^{2n+1}} = -\frac{2}{t}\,f_1(t)\,,$$

$$g_2'(t) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,G_2(n)}{t^{2n+1}} = -\frac{2}{t}\,f_2(t)\,.$$

Ligningerne (33) og (33*) kan derfor skrives saaledes

$$F(z)-F(-z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})\,f_1(t)\,\frac{dt}{t}\,, \tag{36}$$

$$F(z)+F(-z)-2F(0)=\frac{z}{\pi i}\int\limits_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})\,f_2(t)\,\frac{dt}{t}\,. \tag{36*}$$

Vi har kun bevist, at disse Integraler konvergerer for alle Værdier af z, men vi kan ikke paastaa, at de er absolut konvergente. For at bestemme Størrelsesordenen for $f_1(t)$ ved Tilnærmelse til $t=\pm i$ bemærker vi, at af (29) følger at

$$f_1(t)=-\frac{t}{2}\,g_1'(t)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{2n}{\triangle}\,G_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\overset{2n}{\triangle}\,G_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+2}}\,.$$

Anvender man paa disse to Rækker Hjælpesætning 2 i Forbindelse med (28), saa ser man, at $(t\mp i)\,f_1(t)\rightarrow 0$, naar $t\rightarrow\pm i$ langs med Integrationsvejen. Paa samme Maade viser man, at

$$\lim_{t\rightarrow\pm i}(t\mp i)\,f_2(t)=0 \tag{37}$$

ved Tilnærmelse langs med Integrationsvejen. Denne Egenskab ved $f_2(t)$ tillader os at integrere endnu en Gang per partes i (36*). Lad

$$A_1=i\,(1+\varepsilon),\quad C_1=-i\,(1+\varepsilon),$$

hvor ε er et positivt Tal. I Stedet for (36*) betragter vi først Integralet

$$\frac{z}{\pi i}\int\limits_{C_1F_1A_1}(t^{2z}-t^{-2z})\,f_2(t)\,\frac{dt}{t}\,,$$

udstrakt langs med en Bue $C_1F_1A_1$ af en Cirkel, der har Centrum i et fast Punkt $a>1$, og som gaar gennem C_1 og A_1. Lader vi $\varepsilon\rightarrow 0$, saa reducerer dette Integral sig til (36*). For en positiv Værdi af ε vil vi nu integrere per partes og derefter lade $\varepsilon\rightarrow 0$. Det helt integrerede Led vil derved forsvinde, fordi $f_2(t)$ er en lige Funktion af t, som tilfredsstiller Betingelsen (37). Vi faar da

$$F(z)+F(-z)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_1F_1A_1}(t^{2z}+t^{-2z})\,f(t)\,\frac{dt}{t}\,, \tag{38}$$

hvor

$$f(t)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)+F(-n)}{t^{2n}} \tag{39}$$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{2n}{\triangle}\,F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\,. \tag{39*}$$

For $\varepsilon = 0$ kan man ikke paastaa, at Integralet eksisterer, men af Ræsonnementet fremgaar blot, at den i (38) anførte Grænseværdi eksisterer. Paa lignende Maade som ovenfor viser man, at

$$\lim_{t \to \pm i} (t \mp i)^2 f(t) = 0 \tag{40}$$

ved Tilnærmelse langs med Integrationsvejen. Sætter vi eksempelvis

$$F(z) = \cos \pi z,$$

saa faar vi af (39)

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

og af (38)

$$\cos \pi z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1 F_1 A_1} (t^{2z} + t^{-2z}) \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t},$$

medens derimod (36*) giver

$$\frac{\cos \pi z - 1}{z} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{CFA} (t^{2z} - t^{-2z}) \log \left(t - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Sætter vi

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z},$$

saa følger af (39), at $f(t) = 1$; i (38) kan vi derfor trække Integrationsvejen sammen til Cirkelbuen CFA, og vi faar

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CFA} (t^{2z} + t^{-2z}) \frac{dt}{t},$$

hvad man ogsaa let verificerer direkte.

Integralfremstillinger for Bessels Række.

8. Vi overgaar nu til at betragte den Besselske Interpolationsrække

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2\right) \ldots \left(z^2 - (n - \tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n)!} \mathop{\nabla \triangle}^{2n} F(-n - \tfrac{1}{2}) \\ &+ z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2\right) \ldots \left(z^2 - (n - \tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n+1)!} \mathop{\triangle}^{2n+1} F(-n - \tfrac{1}{2}). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Erstatter man z med $-z$ og adderer eller subtraherer, faar man heraf

$$F(z)+F(-z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n)!}\nabla\overset{2n}{\triangle}F(-n-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2})\right)^2}, \tag{42}$$

$$F(z)-F(-z) = 2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n+1)!}\overset{2n+1}{\triangle}F(-n-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_n\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2})\right)^2}. \tag{42*}$$

Vor Antagelse er, at disse Rækker konvergerer for en eller anden Værdi af z for hvilken de ikke bryder af; men heraf slutter man straks, at de konvergerer ligelig i ethvert endeligt Omraade. Specielt maa altsaa Rækkerne $\sum\alpha_n$ og $\sum\beta_n$ konvergere. Anvender man paa (42) og (42*) Abels partielle Summation, saa finder man

$$H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{3}{2})^2\right)}{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2})\right)^2}\sum_{\nu=n}^{\infty}\alpha_\nu, \tag{43}$$

$$H_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{3}{2})^2\right)}{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2})\right)^2}\sum_{\nu=n}^{\infty}\beta_\nu, \tag{43*}$$

hvor

$$H_1(z) = \frac{F(z)+F(-z)-2F(0)}{2z^2}, \tag{44}$$

$$H_2(z) = \frac{F(z)-F(-z)-2zF'(0)}{2z^3}. \tag{44*}$$

Udtrykker man Koefficienterne i disse to Besselske Rækker ved H_1 og H_2, saa kan de skrives paa Formen

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n)!}\nabla\overset{2n}{\triangle}H_1(-n-\tfrac{1}{2}), \tag{45}$$

$$H_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right)}{(2n)!}\nabla\overset{2n}{\triangle}H_2(-n-\tfrac{1}{2}). \tag{45*}$$

Ved at sammenligne med (43) og (43*) ser man, at den Omstændighed, at $F(z)$ kan fremstilles ved Bessels Række, medfører at

$$\mathop{\nabla \triangle}^{2n} H_1(-n-\tfrac{1}{2}) = \frac{2^{2n}\varepsilon_1(n)}{n^{\frac{3}{2}}}, \tag{46}$$

$$\mathop{\nabla \triangle}^{2n} H_2(-n-\tfrac{1}{2}) = \frac{2^{2n}\varepsilon_2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}, \tag{46*}$$

hvor $\varepsilon_1(n)$ og $\varepsilon_2(n)$ konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Rækkerne

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathop{\nabla \triangle}^{2n} H_1(-n-\tfrac{1}{2})}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}, \tag{47}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathop{\nabla \triangle}^{2n} H_2(-n-\tfrac{1}{2})}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}} \tag{47*}$$

er derfor absolut og ligelig konvergente paa Periferien af Cirklerne $\left|t-\frac{1}{t}\right| = 2.$

Sætter man i (42) og (42*) specielt $F(z) = t^{2z}$, saa finder man

$$t^{2z}+t^{-2z} = \left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}, \tag{48}$$

$$t^{2z}-t^{-2z} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{(2n+1)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}, \tag{48*}$$

og heraf afleder man paa samme Maade som i Paragraf 6, at

$$\frac{1}{\pi i}\int_{CFA} \frac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\frac{dt}{t} = \frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{(2n)!}, \tag{49}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{CFA} \frac{t^{2z}-t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+2}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = z\,\frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{(2n+1)!}. \tag{49*}$$

Ved nu at integrere Rækkerne (47) og (47*) ledvis finder man, under Benyttelse af (49), at

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{CFA} (t^{2z}+t^{-2z})\,\varphi_1(t)\frac{dt}{t}, \tag{50}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{CFA} (t^{2z}+t^{-2z})\,\varphi_2(t)\frac{dt}{t}. \tag{50*}$$

og disse Integraler maa da konvergere for alle Værdier af z. For Funktionerne $\varphi_1(t)$ og $\varphi_2(t)$ afleder man af (47) og (47*) ved Hjælp af (16*) følgende Udviklinger efter faldende Potenser af t

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{H_1(n+\frac{1}{2})}{t^{2n+1}}, \tag{51}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{H_2(n+\frac{1}{2})}{t^{2n+1}}, \tag{51*}$$

og disse Rækker konvergerer for $|t| > 1+\sqrt{2}$. De lige fundne Integralfremstillinger er vel egnede til den Majorantbestemmelse, som er det egentlige Maal for denne Undersøgelse. Men inden vi overgaar til at foretage denne Majorantbestemmelse for $F(z)$, skal vi bemærke, at man af (50) og (50*) kan aflede andre Integraludtryk, som vel ikke er egnede til det nævnte Formaal, men som dog i andre Henseender er at foretrække for disse.

I (50) kan man uden at ændre Integralets Værdi tage som Integrationsvej Cirkelbuen CF_1A. Integrerer man derefter per partes og bemærker, at $\varphi_1(t)$ er en ulige Funktion af t, saa faar man

$$H_1(z) = \frac{1}{2\pi i z}\int_{CF_1A} (t^{2z} - t^{-2z})\, \varphi_1'(t)\, dt.$$

Differentierer man Rækken (47) med Hensyn til t og anvender Hjælpesætning 2 paa den derved fremkomne Række, saa viser (46), at $\varphi_1'(t) \rightarrow 0$, naar $t \rightarrow \pm i$ langs med Integrationsvejen. Integrerer man per partes i det sidste Integral, saa faar man derfor at

$$F(z) + F(-z) - 2F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{CF_1A} (t^{2z} + t^{-2z})\, (t\varphi_1''(t) + \varphi_1'(t)\, dt. \tag{52}$$

Differentierer man (51) med Hensyn til t faas

$$t\varphi_1'(t) = -2\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(n+\frac{1}{2})\, H_1(n+\frac{1}{2})}{t^{2n+1}};$$

Differentieres endnu en Gang faar man

$$\begin{aligned} t\varphi_1''(t) + \varphi_1'(t) &= 4\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(n+\frac{1}{2})^2\, H_1(n+\frac{1}{2})}{t^{2n+2}} \\ &= \frac{2}{t}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{F(n+\frac{1}{2}) + F(-n-\frac{1}{2}) - 2F(0)}{t^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Ligningen (52) kan derfor skrives saaledes

$$F(z)+F(-z)=\frac{1}{\pi i}\int_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,f_1(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{53}$$

hvor

$$f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{F(n+\frac{1}{2})+F(-n-\frac{1}{2})}{t^{2n+1}} \tag{53*}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\overset{2n}{\nabla \triangle} F(-n-\frac{1}{2})}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}. \tag{53**}$$

Ved at differentiere Rækken (47) to Gange med Hensyn til t og anvende Hjælpesætning 2 paa de derved fremkomne Rækker ser man, at

$$\lim_{t \to \pm i}(t^2+1)\,f_1(t)=0 \tag{54}$$

ved Tilnærmelse langs med Integrationsvejen. Af (50*) faar man paa samme Maade, at

$$\frac{F(z)-F(-z)}{z}=\frac{1}{\pi i}\int_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,f_2(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{55}$$

hvor

$$f_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{F(n+\frac{1}{2})-F(-n-\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})\,t^{2n+1}} \tag{55*}$$

og

$$\lim_{t \to \pm i}(t^2+1)\,f_2(t)=0. \tag{55**}$$

Ved endnu en Gang at integrere per partes afleder man af (55) at

$$F(z)-F(-z)=\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{C_1F_1A_1}(t^{2z}-t^{-2z})\,f(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{56}$$

hvor

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{F(n+\frac{1}{2})-F(-n-\frac{1}{2})}{t^{2n+1}} \tag{56*}$$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\overset{2n-1}{\triangle} F(-n+\frac{1}{2})}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}. \tag{56**}$$

Differentierer man (47*) tre Gange med Hensyn til t og anvender Hjælpesætning 2 paa de derved fremkomne Rækker, saa ser man, at

$$\lim_{t \to \pm i} (t^2+1)^2 f(t) = 0 \tag{57}$$

ved Tilnærmelse langs med Integrationsvejen. Sætter vi eksempelvis

$$F(z) = \sin \pi z,$$

saa faar vi af (56*)

$$f(t) = \frac{2}{t+\frac{1}{t}}$$

og af (56)

$$\sin \pi z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_1 F_1 A_1} \frac{t^{2z} - t^{-2z}}{t+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t},$$

medens derimod (55) giver

$$\frac{\sin \pi z}{z} = \frac{2}{\pi i} \int\limits_{CFA} (t^{2z} + t^{-2z}) \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \frac{dt}{t}.$$

Nogle specielle Interpolationsrækker.

9. Den hypergeometriske Funktion giver os nogle bemærkelsesværdige Eksempler paa Interpolationsrækker, der befinder sig i Nærheden af Konvergensgrænsen. Disse Eksempler belyser paa interessant Maade Forholdet mellem Rækkens Egenskaber og Størrelsesordenen for den tilsvarende Funktion $F(z)$ for meget store Værdier af z samt Størrelsesordenen for den frembringende Funktion $f(t)$ ved Tilnærmelse til Cirkelbuen CFA.

Vi begynder med at betragte den hypergeometriske Række $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ i hvilken

$$x = 1, \quad \alpha = z, \quad \beta = -z.$$

Denne giver os følgende Stirlingske Række

$$F(z) = \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}, \tag{58}$$

der for alle Værdier af z er absolut konvergent, hvis $\Re(\gamma) > 0$, medens den er divergent, hvis $\Re(\gamma) \leq 0$. Ved at vælge γ tilstrækkelig lille kan man komme saa nær ved Konvergensgrænsen, som man vil. Af kendte Egenskaber hos Gammafunktionen følger at

$$F(z) = -\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\pi} \frac{\Gamma(z-\gamma+1)}{\Gamma(z+\gamma)} \sin \pi (z-\gamma)$$

$$\backsim \text{konst. } z^{1-2\gamma} \sin \pi (z-\gamma).$$

Da vi i den ovenfor citerede Afhandling[1] har vist, at man for enhver Funktion, der kan fremstilles med en Stirlingsk Række, har at

$$|F(re^{iv})| < e^{\pi r \sin v} r \varepsilon(r), \quad \frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4},$$

saa kan man i vort Eksempel ved at vælge γ tilstrækkelig lille bringe Funktionens Størrelsesorden i Vinkelen $\frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4}$ saa nær op til den maximale, som man vil. Af den første Ligning (58) faar man

$$F(-n) = F(n) = \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Indsættes disse Værdier i (39), finder man følgende Udtryk for $f(t)$

$$f(t) = -1 + 2F\left(1, 1-\gamma, \gamma; -\frac{1}{t^2}\right), \tag{59}$$

og af (38) følger da, at

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\Gamma(\gamma-z)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1F_1A_1} (t^{2z} + t^{-2z}) f(t) \frac{dt}{t}. \tag{60}$$

Den principale Gren af $f(t)$ har de singulære Punkter $t = \pm i$, $t = 0$ og ingen andre; af kendte Egenskaber hos den hypergeometriske Funktion afleder man let, hvorledes $f(t)$ forholder sig i Nærheden af Punkterne $t = \pm i$. Man har nemlig

$$\left.\begin{aligned} F\left(1, 1-\gamma, \gamma; -\frac{1}{t^2}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} F\left(\gamma-1, 1, 1; 1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{2\gamma-2} \\ + \frac{1}{2} F\left(1, 1-\gamma, 3-2\gamma, 1+\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

I Punkterne $t = \pm i$ bliver $f(t)$ saaledes uendelig af en Orden, der kan bringes saa nær op til den maximale, som man vil, ved at vælge γ tilstrækkelig lille. I den sidste Ligning betyder $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{2\gamma-2}$ den Gren, som for $t = \infty$ reducerer sig til 1. Endvidere er

$$F\left(\gamma-1, 1, 1; 1+\frac{1}{t^2}\right) = \begin{cases} e^{-\pi i(\gamma-1)} t^{2\gamma-2} & \text{i Nærheden af } t = i, \\ e^{\pi i(\gamma-1)} t^{2\gamma-2} & \text{- — - } t = -i, \end{cases}$$

hvor $t^{2\gamma-2}$ betyder den Gren, som for $t = 1$ har Værdien 1. Denne hypergeometriske Række har jo nemlig Værdien 1 baade for $t = +i$ og for $t = -i$; den fremstiller saaledes to forskellige Funktioner i de to Omraader, hvor den konvergerer.

[1] Bull. Soc. math. France 52 (1924), p. 114—132.

Det er værd at bemærke, at Integralet (60) kan i væsentlig Grad reduceres. Lad os for et Øjeblik antage, at $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$. Man kan da i (60) trække Integrationsvejen sammen til den Bue af Enhedscirklen, som forbinder Punktet $-i$ med Punktet $+i$, og som gaar gennem Punktet $+1$. Man har altsaa

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{+i}(t^{2z}+t^{-2z})\,f(t)\,\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{i}(t^{2z}+t^{-2z})\left(f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{dt}{t}. \end{aligned}\right\} \quad (60^*)$$

Men af (59) i Forbindelse med (61) afleder man ved en simpel Regning at

$$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2},$$

hvor $\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}$ betyder den Gren, som for $t=1$ har Værdien 1. Af (60*) faar vi da den søgte Formel

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \frac{-i}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\int_{1}^{i}(t^{2z}+t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}\frac{dt}{t}. \quad (62)$$

Sætter vi $t = e^{i\theta}$, saa kan denne skrives

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta z\ \ (\cos\theta)^{2\gamma-2}\,d\theta. \quad (62^*)$$

Vi har herved forudsat, at $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$, medens vor Række (58) konvergerer for $\Re(\gamma) > 0$. Vi kan dog let af (62) aflede et Sløjfeintegral, som fremstiller vor Funktion i hele det Omraade, hvor Rækken (58) konvergerer. Lad $l_{1,i}$ betegne en Lacet, som udgaar fra Punktet $t=1$, omkredser Punktet $t=i$ i positiv Omløbsretning og derefter vender tilbage til Punktet 1.

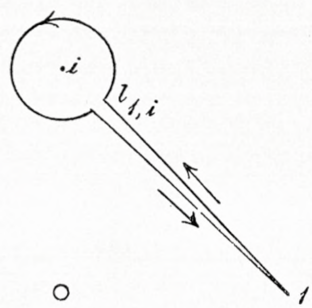

Fig. 3.

Af (62) følger da, at

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = -\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\frac{3}{2}-\gamma)}{4\pi\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-2\pi i\gamma}}{\sin\pi\gamma}\int_{l_{1,i}}(t^{2z}+t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}\frac{dt}{t}, \quad (62^{**})$$

og denne Integralfremstilling for vor Række er gyldig i hele Omraadet $\Re(\gamma) > 0$ blot med Undtagelse for de Værdier af γ som er af Formen $\frac{1+p}{2}$, hvor p er hel, positiv. For $\gamma = \frac{1}{2}$ faar vi

$$\cos \pi z = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1, i} (t^{2z} + t^{-2z}) \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^2 (z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - (n-1)^2).$$

For $\gamma = \frac{1}{2} + p$, hvor p er hel, positiv, faar man af (62) og (58), at

$$\frac{(-1)^p}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cos \pi z}{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - \frac{3}{2})^2) \ldots (z^2 - (p - \frac{1}{2})^2)} = \frac{-i}{(p-1)!} \int_1^i (t^{2z} + t^{-2z}) \left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}\right)^{2p-1} \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2^{2n+p} \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - (n-1)^2)}{(2n)!(2n+1)(2n+3) \ldots (2n+2p-1)}.$$

Specielt følger heraf for $p = 1$

$$\frac{\cos \pi z}{z^2 - (\frac{1}{2})^2} = i \int_1^i (t^{2z} + t^{-2z}) \left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+2}}{(2n+1)!} z^2 (z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - (n-1)^2).$$

Endvidere faar man af (62) for $\gamma = p + 1$

$$\frac{(-1)^p \, p! \sin \pi z}{\pi z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \ldots (z^2 - p^2)} = \frac{-i}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_1^i (t^{2z} + t^{-2z}) \left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}\right)^{2p} \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - (n-1)^2)}{n!\,(n+p)!}.$$

Specielt for $p = 0$

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{1}{\pi i} \int_1^i (t^{2z} + t^{-2z}) \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - (n-1)^2)}{(n!)^2}$$

og for $p = 1$

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z(z^2 - 1^2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_1^i (t^{2z} + t^{-2z}) \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^2(z^2-1^2) \ldots \left(z^2 - (n-1)^2\right)}{n!\,(n+1)!}.$$

10. Vi skal dernæst betragte den hypergeometriske Række $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, i hvilken

$$x = 1, \quad \alpha = 1 + z, \quad \beta = 1 - z.$$

Denne giver os følgende Stirlingske Række

$$F(z) = \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-1)\,z}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \ldots (z^2-n^2)}{n!\,(\gamma+1)(\gamma+2) \ldots (\gamma+n)}, \tag{64}$$

der er absolut konvergent for $\Re(\gamma) > 1$ og divergent for $\Re(\gamma) \leq 1$. Hvis $\Re(\gamma) > 1$, saa er i (60) Funktionen under Integraltegnet endelig og kontinuert langs med Cirkelbuen *CFA*. Man kan derfor i Integralet (60) trække Integrationsvejen sammen til Cirkelbuen *CFA* og derefter integrere per partes; man finder da

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-1)\,z}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \frac{1}{\pi i}\int_{CFA} \left(t^{2z} - t^{-2z}\right) F\left(2, 2-\gamma, 1+\gamma; \frac{-1}{t^2}\right) \frac{dt}{t^3}. \tag{65}$$

Det forudsættes her, at $\Re(\gamma) > 1$, og Integralet er da absolut konvergent for alle Værdier af z. Man kunde ogsaa have fundet denne Ligning ved at anvende (36) paa Funktionen paa venstre Side af (65). Man har altsaa for denne Funktion, at

$$f_1(t) = \frac{2}{t^2} F\left(2, 2-\gamma, 1+\gamma; -\frac{1}{t^2}\right).$$

Ved at differentiere med Hensyn til t i (61) ser man, at i Nærheden af de singulære Punkter $t = \pm i$ er $f_1(t)$ af Formen

$$f_1(t) = c\left(t + \frac{1}{t}\right)^{2\gamma-3}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \psi(t), \tag{66}$$

hvor c er en Konstant, og hvor $\psi(t)$ er regulær i Nærheden af Punkterne $t = \pm i$. Ved at integrere per partes i (62) finder man for $\Re(\gamma) > 1$, at

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-1)\,z}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = \frac{i\,\Gamma(\gamma+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\int_1 (t^{2z} - t^{-2z}) \left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-3} \left(t - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} \tag{67}$$

$$= \frac{2\,\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta z\, (\cos\theta)^{2\gamma-2} \operatorname{tg}\theta\, d\theta. \tag{67*}$$

For $\gamma = \frac{1}{2}+p$ faar man heraf

$$\frac{(-1)^p}{\sqrt{\pi}} \frac{2\,\Gamma(p-\frac{1}{2})\, z\cos\pi z}{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(p-\frac{1}{2})^2\right)} = \frac{i}{(p-1)!}\int_1^i (t^{2z}-t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2p-2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,2^{2n+p}\,\frac{z\,(z^2-1^2)\,(z^2-2^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n-1)!\,(2n+1)\,(2n+3)\ldots(2n+2p-1)}.$$

Specielt for $p = 1$

$$\frac{z\cos\pi z}{z^2-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2i}\int_1^i (t^{2z}-t^{-2z})\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}}{(2n-1)!\,(2n+1)}\,z\,(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-(n-1)^2\right).$$

For $\gamma = p+1$ faar man

$$\frac{(-1)^p\,(p-1)!\,\sin\pi z}{\pi\,(z^2-1^2)\,(z^2-2^2)\ldots(z^2-p^2)} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+\frac{1}{2})}\int_1^i (t^{2z}-t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2p-1}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{z\,(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(n+p+1)!}.$$

Specielt for $p = 1$

$$\frac{\sin\pi z}{\pi\,(z^2-1^2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_1^i (t^{2z}-t^{-2z})\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{z\,(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(n+2)!}.$$

Alle disse Rækker er absolut konvergente i hele Planen.

11. Som Eksempel paa en Besselsk Række betragter vi den hypergeometriske Række $F(\alpha, \beta, \gamma+1; x)$ i hvilken

$$x = 1, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}+z, \quad \beta = \tfrac{1}{2}-z.$$

Denne giver os følgende Besselske Række

$$F(z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+z+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-z+\frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{n!\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n)}, \quad (68)$$

der er absolut konvergent for $\Re(\gamma) > 0$ og divergent for $\Re(\gamma) \leq 0$. Af (53*) finder vi

$$f_1(t) = \frac{2}{t} F\left(1,\ 1-\gamma,\ 1+\gamma;\ \frac{-1}{t^2}\right)$$

og (53) giver os da følgende Integral

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+z+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{CFA} (t^{2z}+t^{-2z})\,F\left(1,\ 1-\gamma,\ 1+\gamma;\ \frac{-1}{t^2}\right)\frac{dt}{t^2}\,, \tag{69}$$

der er absolut konvergent for $\Re(\gamma)>0$. Dette Integral kan man naturligvis reducere paa samme Maade som i Paragraf 9, men man maa derved genfinde Ligningen (62). For $\gamma=\frac{1}{2}$ finder man af (68)

$$\frac{\sin\pi z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(2n+1)!}\left(z^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\tfrac{1}{2})^2\right),$$

og for $\gamma=1$ finder man

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\pi z}{z^2-(\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(z^2-(\frac{1}{2})^2\right)\left(z^2-(\frac{3}{2})^2\right)\ldots\left(z^2-(n-\frac{1}{2})^2\right)}{n!\,(n+1)!}.$$

12. Rækkerne (58), (64) og (68) fremstiller, som vi har set, Funktioner, hvis Størrelsesorden paa enhver Radiusvektor i det indre af Vinklen $\frac{3\pi}{4}>v>\frac{\pi}{4}$ nærmer sig til den maximale, naar γ nærmer sig til 0 henholdsvis 1. Vi skal nu betragte nogle Eksempler paa Funktioner, hvis Størrelsesorden paa en enkelt Radiusvektor i Vinklen $\frac{\pi}{4}>v>-\frac{\pi}{4}$ kan bringes saa nær op til den maximale, som man vil, ved passende Valg af γ. Den hypergeometriske Række giver os ogsaa her de simplest tænkelige Eksempler af denne Art. Lad a være et fra $\pm i$ forskelligt Punkt paa Cirkelbuen *CFA* (Fig. 1). Vi betragter den Stirlingske Række

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= z\,F\left(1+z,\ 1-z,\ \gamma+1;\ -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z\,(z^2-1^2)\,(z^2-2^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n)}\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Da $\left|a-\frac{1}{a}\right|=2$, saa er denne Række for alle Værdier af z absolut konvergent hvis $\Re(\gamma)>1$; den konvergerer, men kun betinget, hvis $1\geq\Re(\gamma)>0$, og den divergerer, hvis $\Re(\gamma)\leq 0$. Af den sidste Række (34) ser man, at $f_1(t)$ ogsaa kan fremstilles ved en hypergeometrisk Række, og man har

$$f_1(t) = \frac{2}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2} F\left(1,\ \frac{3}{2},\ \gamma+1;\ \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\right). \tag{71}$$

Ligningen (36) giver os da følgende Integralfremstilling

$$F(z) = zF\left(1+z,\ 1-z,\ \gamma+1;\ -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{CF_1A} (t^{2z}-t^{-2z}) F\left(1,\ \frac{3}{2},\ \gamma+1;\ \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\right) \frac{dt}{t\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}. \tag{72}$$

Af (71) fremgaar, at de singulære Punkter for $f_1(t)$ er $t = 0, \pm a, \pm\frac{1}{a}$. Det er let at se hvorledes $f_1(t)$ forholder sig i Nærheden af disse Punkter. Den bekendte Relation mellem hypergeometriske Rækker

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-x)$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x)$$

viser nemlig, at $f_1(t)$ kan skrives paa Formen

$$f_1(t) = c\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}} \left(t-\frac{1}{t}\right) + \psi(t), \tag{73}$$

hvor $\psi(t)$ er regulær i Punkterne $t = \pm a, \pm\frac{1}{a}$. Dette Udtryk er altsaa i Særdeleshed gyldigt i en vis Nærhed af Punktet $t = a$, og Konstanten c har da følgende Værdi

$$c = \frac{4}{i\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right) e^{-\pi i\gamma} \frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^3}.$$

Integralet (72) udstrakt langs med en Bue af Enhedscirklen fra $-i$ over $+1$ til $+i$ er aabenbart Nul, idet

$$\int_{-i}^{1} = \int_{i}^{1}$$

som man ser ved at ombytte t med $\frac{1}{t}$. Vi kan derfor i Integralet (72) til Integrationsvejen føje den nævnte Bue af Enhedscirklen; den derved fremkomne lukkede Integrationslinie kan vi trække sammen til en Lacet $l_{1,a}$ (Fig. 4). Da nu $\psi(t)$ er regulær indenfor denne Lacet, saa er det kun det første Led i (73), der kommer i Betragtning, og

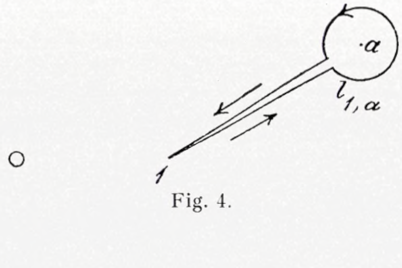

Fig. 4.

(72) reducerer sig da til

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= zF\left(1+z,\ 1-z,\ \gamma+1;\ -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right) \\ &= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\pi i\gamma}}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^3}\int\limits_{l_{1,a}}(t^{2z}-t^{-2z})\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}, \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

hvor vi dog maa forudsætte, at γ er forskellig fra Tallene $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ Med den under Integraltegnet forekommende Potens af $1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$ menes den Gren, som har Værdien 1 i Integrationsliniens Begyndelsespunkt.

Hvis $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$, kan man trække Lacetten $l_{1,a}$ sammen til den to Gange gennemløbne rette Linie fra 1 til a og faar da

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= zF\left(1+z,\ 1-z,\ \gamma+1;\ -\tfrac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^3}\int_1^a(t^{2z}-t^{-2z})\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}. \end{aligned}\right\} \quad (74^*)$$

Den sidste Relation er naturligvis ogsaa gyldig for $\gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ idet Integralet konvergerer ligeligt i Nærheden af disse Punkter. Lader man $a \rightarrow i$, saa reducerer (74*) sig til Ligningen (67). Relationen (74*) er saaledes gyldig for alle a paa Buen *CFA* inklusive Endepunkterne; dog skal $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$, hvis $a \neq \pm i$, men $\Re(\gamma) > 1$, hvis $a = \pm i$. Relationen (74) er derimod i k k e gyldig for $a = +i$ eller $a = -i$.

For $\gamma = \frac{1}{2}$ er det let at evaluere Integralet (74), idet Funktionen under Integraltegnet har en Pol af 1. Orden i Punktet $t = a$. Man finder da

$$\left.\begin{aligned} a^{2z}-a^{-2z} &= \frac{a+\frac{1}{a}}{\pi i}\int\limits_{l_{1,a}}(t^{2z}-t^{-2z})\,\frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2-a^2)\left(t^2-\frac{1}{a^2}\right)} \\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)\,\ldots\,(z^2-n^2)}{(2n+1)!}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

For $\gamma = \frac{3}{2}$ finder man af (74*)

$$\frac{a^{2z+1}-a^{-2z-1}}{2z+1}-\frac{a^{2z-1}-a^{-2z+1}}{2z-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)\,\ldots\,\left(z^2-(n-1)^2\right)}{(2n-1)!\,(2n+1)}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}.$$

13. Vi forudsætter som før, at a er et fra $\pm i$ forskelligt Punkt paa Cirkelbuen CFA og betragter nu den med (70) beslægtede Stirlingske Række

$$F(z) = F\left(z, -z, \gamma; -\tfrac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^{2n}. \tag{76}$$

Denne Række konvergerer absolut for $\Re(\gamma) > 0$, den konvergerer men kun betinget for $0 \geqq \Re(\gamma) > -1$, og den divergerer for $\Re(\gamma) \leqq -1$. Herved maa dog undtages $\gamma = 0$. Indsætter vi denne Værdi for $F(z)$ i (38), finder vi

$$F(z) = F\left(z, -z, \gamma; -\tfrac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{CF_1A} (t^{2z}+t^{-2z})\, F\left(1, \tfrac{1}{2}, \gamma; \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\right) \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}\,\frac{dt}{t}. \tag{77}$$

Man ser let, hvorledes $f(t)$ forholder sig i Nærheden af de singulære Punkter $\pm a, \pm\frac{1}{a}$. Svarende til (73) faar man nemlig i dette Tilfælde at

$$f(t) = \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}\, F\left(1, \tfrac{1}{2}, \gamma; \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\right)$$
$$= c\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}} \left(t+\frac{1}{t}\right) + \psi(t).$$

Man ser heraf, at den til en konvergent Stirlingsk Række hørende Funktion $f(t)$ i et og dermed i uendelig mange Punkter paa Cirkelbuen CFA kan blive uendelig af Ordenen $\frac{5}{2}-\varepsilon$. Af (77) afleder man ved samme Fremgangsmaade som i forrige Paragraf, at

$$F(z) = F\left(z, -z, \gamma; -\tfrac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\frac{3}{2}-\gamma)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\pi i\gamma}}{a-\frac{1}{a}} \int_{l_1, a} (t^{2z}+t^{-2z}) \left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}} \left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}, \tag{78}$$

hvor dog γ skal være forskellig fra Tallene $0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ Hvis $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$ kan man erstatte Sløjfeintegralet med det retliniede Integral

$$F(z) = F\left(z, -z, \gamma; -\tfrac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\,\frac{1}{a-\dfrac{1}{a}}\int_1^a (t^{2z}+t^{-2z})\left[1-\frac{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}, \qquad (78^*)$$

og denne Formel er ogsaa gyldig for $\gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ samt for $a = \pm i$ i Modsætning til hvad der gælder om (78).

For $\gamma = \frac{1}{2}$ finder man af (78)

$$a^{2z}+a^{-2z} = \frac{a-\dfrac{1}{a}}{\pi i}\int_{l_{1,a}} (t^{2z}+t^{-2z})\,\frac{(t^2+1)\,dt}{(t^2-a^2)\left(t^2-\dfrac{1}{a^2}\right)}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n}. \qquad (75^*)$$

For $\gamma = \frac{3}{2}$ finder man af (78*)

$$\frac{a^{2z+1}-a^{-2z-1}}{2z+1}+\frac{a^{2z-1}-a^{-2z+1}}{2z-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n+1)!}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}.$$

14. Vi har ment, at det havde sin Interesse at aflede de foregaaende specielle Relationer ud fra vore almindelige for alle Stirlingske Rækker gyldige Integraludtryk. Men man kan naturligvis ogsaa erholde disse Relationer paa en simplere og mere direkte Maade. Lad os f. Eks. betragte Integralet (78*). Vi udvikler $t^{2z}+t^{-2z}$ efter Potenser af $t-\dfrac{1}{t}$. For Funktionen under Integraltegnet faar man da følgende Rækkeudvikling

$$2\left[1-\frac{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Denne Række er ligelig konvergent paa den rette Linie fra 1 til a. Hvis $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$, kan vi derfor integrere ledvis med Hensyn til t. Sætter vi

$$t-\frac{1}{t} = \left(a-\frac{1}{a}\right)y,$$

da er

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \left(a-\frac{1}{a}\right)dy,$$

altsaa

$$\int_1^a \left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}\int_0^1 y^{2n}(1-y^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{\gamma-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n+1}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma+n)}.$$

Indsættes denne Værdi, ser man, at ledvis Integration af den sidst anførte Række fører os netop til Relationen (78*), og heraf afleder man atter let Relationen (78). Paa samme Maade afleder man af Rækken

$$t^{2z}+t^{-2z} = \left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\,\ldots\,(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}$$

ved ledvis Integration følgende Integralfremstilling for den til (76) svarende Besselske Række

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\,\ldots\,(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\,\ldots\,(\gamma+n-1)}\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^{2n+1}\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\int_1^a (t^{2z}+t^{-2z})\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\frac{dt}{t},\end{aligned}\right\}\quad(79)$$

hvor det forudsættes at $\Re(\gamma) > \frac{1}{2}$.

15. Vi skal nu ved Hjælp af de fundne Integraludtryk vise, hvorledes de betragtede hypergeometriske Funktioner forholder sig for meget store Værdier af $|z|$. Vi sætter $z = re^{iv}$ og antager foreløbig, at den reelle Del af z er større end et vist positivt Tal α. Lad som hidtil a være et fra $\pm i$ forskelligt Punkt paa Cirkelbuen CFA, og lad os antage, at $\Re(\gamma) > -1$. Vi betragter Ligningen (78):

$$\left.\begin{aligned}F(z) &= F\left(z, -z, \gamma; -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}\,\frac{e^{-\pi i\gamma}}{2\cos\pi\gamma}\,\frac{1}{a-\frac{1}{a}}\int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}.\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

Ved at udvikle efter Potenser af $a-t$ faar man

$$1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=(a-t)\frac{2(a^2+1)}{a(a^2-1)}\left(1-(a-t)\frac{a^4+3}{2a(a^4-1)}+\ldots\right),$$

altsaa er

$$\frac{t+\frac{1}{t}}{a-\frac{1}{a}}\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}\left[\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}\right]^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(1+\left(1-\frac{t}{a}\right)\varphi(t)\right). \qquad (80)$$

Her betyder $\left[\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}\right]^{\gamma-\frac{1}{2}}$ den Gren, som for $a=1+\sqrt{2}$ antager Værdien $e^{(\gamma-\frac{1}{2})\log(2\sqrt{2})}$, hvor Logarithmen har den principale Værdi. $\varphi(t)$ er en Funktion, som ikke har andre singulære Punkter end $t=\frac{1}{a}$, $-a$, $-\frac{1}{a}$ samt 0 og ∞. Man har nu

$$\int_{l_{1,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt=\int_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt-(1+e^{2\pi i\gamma})\int_0^1 t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt.$$

Da den reelle Del af z er positiv, er det sidste Integral paa højre Side konvergent, og dets absolutte Værdi er mindre end en fast af z uafhængig Konstant. Endvidere er

$$\begin{aligned}\int_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt &= a^{2z}\int_{l_{0,1}} t^{2z-1}(1-t)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt\\ &= a^{2z}(1+e^{2\pi i\gamma})\,\frac{\Gamma(2z)\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}{\Gamma(2z+\gamma-\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

Altsaa har vi

$$\int_{l_{1,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt=a^{2z}\,\frac{\Gamma(2z)\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}{\Gamma(2z+\gamma-\frac{1}{2})}\,(1+e^{2\pi i\gamma})+O(1). \qquad (81)$$

Lad $l_{\infty,a}$ betegne den i Fig. 5 angivne Lacet, som udgaar fra det uendelig fjerne Punkt, og som omslutter Punktet a.

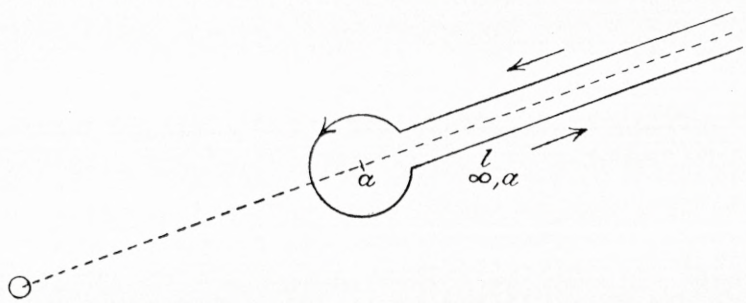

Fig. 5.

Man har da

$$\int\limits_{l_{1,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt = \int\limits_{l_{\infty,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt - (1+e^{2\pi i\gamma})\int\limits_{\infty}^{1} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt.$$

Hvis $\Re(2z-\gamma+\frac{3}{2})>0$, saa er det sidste Integral paa højre Side konvergent, og dets absolutte Værdi er mindre end en fast af z uafhængig Konstant. I det første Integral paa højre Side er paa den første Del af Integrationslinien $\arg\left(1-\frac{t}{a}\right)$ lig med $+\pi$ eller $-\pi$ alt efter som a ligger over eller under den reelle Akse. Man har nu

$$\int\limits_{l_{\infty,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt = a^{-2z}e^{\pm\pi i(\gamma-\frac{3}{2})}\int\limits_{l_{\infty,1}} t^{-2z-1}(t-1)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt$$

$$= a^{-2z}e^{\pm\pi i(\gamma-\frac{1}{2})}(1+e^{2\pi i\gamma})\frac{\Gamma(2z-\gamma+\frac{3}{2})\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}{\Gamma(2z+1)}.$$

Altsaa er

$$\int\limits_{l_{1,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt = a^{-2z}e^{\pm\pi i(\gamma-\frac{1}{2})}(1+e^{2\pi i\gamma})\frac{\Gamma(2z-\gamma+\frac{3}{2})\,\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})}{\Gamma(2z+1)} + O(1) \quad (81^*)$$

hvor det øverste eller nederste Fortegn gælder alt efter som a ligger over eller under den reelle Akse. Det staar tilbage at betragte Integralet

$$P = \int\limits_{l_{1,a}} (t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}} \varphi(t)\frac{dt}{t}.$$

Da $\varphi(t)$ er regulær i Punktet $t=a$, kan man skrive denne Funktion under Formen

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \left(1-\frac{t}{a}\right)\varphi_1(t),$$

hvor $\varphi_1(t)$ er regulær i $t=a$. Man har da

$$P = \varphi(a)\int\limits_{l_{1,a}} (t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\frac{dt}{t} + \int\limits_{l_{1,a}} (t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\varphi_1(t)\frac{dt}{t}. \quad (82)$$

Det første Integral er af samme Form som (81) og (81*), og det giver os to Led, som er forsvindende i Forhold til disse. For at bestemme Størrelsesordenen for det sidste Integral behøver man blot at bemærke at

$$\int\limits_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\varphi_1(t)\,dt = a^{2z}(1+e^{2\pi i\gamma})\int_0^1 t^{2z-1}(1-t)^{\gamma+\frac{1}{2}}\varphi_1(at)\,dt,$$

$$\int\limits_{l_{\infty,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\varphi_1(t)\,dt = a^{-2z}e^{\pm\pi i(\gamma-\frac{1}{2})}(1+e^{2\pi i\gamma})\int_1^{\infty} t^{-2z-1}(t-1)^{\gamma+\frac{1}{2}}\varphi_1(at)\,dt.$$

Da man nu kan finde et positivt Tal α saaledes at

$$\begin{aligned} \left| t^{\alpha} \varphi_1(at) \right| &< \text{Konst.} \qquad && 0 < t < 1, \\ \left| t^{-\alpha} \varphi_1(at) \right| &< \text{Konst.} \qquad && 1 < t < \infty, \end{aligned}$$

saa ser man straks, at de to sidste Integraler er forsvindende i Forhold til det første Led paa højre Side af (82). Hvis man derfor i (78) substituerer Udviklingen (80) og benytter (81) og (81*), saa finder man følgende asymptotiske Udtryk for $F(z)$

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= F\left(z, -z, \gamma; -\tfrac{1}{4}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}} \left[a^{2z} z^{\frac{1}{2}-\gamma} + a^{-2z}(-z)^{\frac{1}{2}-\gamma}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Rigtigheden af denne Ligning er tidligere vist af PERRON[1] for positive Værdier af z. Vi har forudsat, at den reelle Del af z er $> \alpha > 0$, men da $F(z)$ er en lige Funktion af z, saa ser man, at (83) ogsaa gælder, hvis den reelle Del af z er $< \div \alpha$. Vi har endvidere forudsat at $a \neq \pm i$, og man ser straks, at (83) ophører at gælde, naar a nærmer sig til et af Punkterne $+i$ eller $-i$. For disse Værdier af a har man nemlig

$$\begin{aligned} F(z) = F(z, -z, \gamma; 1) &= \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} \\ &= -\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\pi} \frac{\Gamma(z-\gamma+1)}{\Gamma(z+\gamma)} \sin\pi(z-\gamma) \\ &= -\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\pi} z^{1-2\gamma} \sin\pi(z-\gamma) \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

Ved Beviset for Ligningen (83) har vi stiltiende forudsat, at γ er forskellig fra Tallene $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$; men (83) er ogsaa gyldig for disse Værdier af γ, som man let ser ved at benytte (78*) i Stedet for (78).

For den ved Rækken (70) definerede Funktion $F(z)$ finder man paa samme Maade af Integralet (74) at

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= z\,F\left(1+z, 1-z, \gamma+1; -\tfrac{1}{4}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right) \\ &= \frac{2\,\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)} \left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}} \left[a^{2z} z^{\frac{1}{2}-\gamma} - a^{-2z}(-z)^{\frac{1}{2}-\gamma}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right), \end{aligned}\right\} \tag{83*}$$

hvor $\Re(\gamma) > 0$, og $a \neq \pm i$. Men for $a = \pm i$ har man

[1] Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg A. 1 (1917) p. 68.

$$F(z) = z\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)} = -\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-1)}{\pi}\,z^{2-2\gamma}\sin\pi(z-\gamma)\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Vi har i det foregaaende forudsat, at a ligger paa Cirkelbuen CFA, men ved at ombytte a med $\frac{1}{a}$ ser man, at Ligningerne (83) og (83*) ogsaa gælder, hvis a ligger paa Cirkelbuen ABC.

Majorantværdi for $F(z)$.

16. Vi skal nu bestemme en øvre Grænse for den ved en vilkaarlig Stirlingsk Række definerede hele Funktion $F(z)$ og dermed aflede det Resultat, som er det egentlige Maal for denne Undersøgelse. De for $F(z)$ fundne Integraludtryk (36) og (38) er ikke egnede til dette Formaal, vi skal derfor begynde med at betragte de ved (22) og (22*) definerede Funktioner $H_1(z)$ og $H_2(z)$. Da

$$\int\limits_{CFA}(t^{2z}-t^{-2z})\,\frac{dt}{t} = 0$$

saa kan man i (26) uden at ændre Integralets Værdi fra $\varphi_1(t)$ trække en vilkaarlig Konstant. Man har derfor at

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{CFA}(t^{2z}-t^{-2z})\left(\varphi_1(t)-\varphi_1(\pm i)\right)\frac{dt}{t}. \tag{26}$$

Vi sætter

$$t = \xi+\sqrt{\xi^2+1}, \tag{84}$$

hvor Kvadratroden skal være positiv for positive Værdier af ξ. Man har da

$$\frac{1}{t} = -\xi+\sqrt{\xi^2+1},$$

$$t-\frac{1}{t} = 2\xi, \quad t+\frac{1}{t} = 2\sqrt{\xi^2+1}.$$

Vi vil nu indføre en ny Integrationsvariabel θ, idet vi sætter

$$\xi = e^{2i\theta}. \tag{85}$$

Man har

$$\sqrt{\xi^2+1} = \sqrt{2\cos 2\theta}\cdot e^{i\theta}$$

altsaa er

$$\left.\begin{aligned} t-1 &= e^{2i\theta}-1+\sqrt{2\cos 2\theta}\,e^{i\theta} \\ &= \sqrt{2}\,e^{i\theta}\left(\sqrt{2\cos 2\theta}+i\sqrt{2}\sin\theta\right) \\ &= \sqrt{2}\,e^{i(\theta+\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta))}. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Naar θ gennemløber Intervallet $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, beskriver t altsaa Cirkelbuen CFA. Man har nu

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \frac{2ie^{i\theta}d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}.$$

Sætter vi

$$\varphi_1(t) = \psi(\theta)$$

saa kan Integralet (26) altsaa skrives saaledes

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (t^{2z} - t^{-2z})\left(\psi(\theta) - \psi\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} \tag{87}$$

hvor i Følge (25)

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{2n-1}{\nabla\,\triangle}\, H_1(-n)}{2^{2n}} e^{-4in\theta}. \tag{88}$$

17. Lad $z = re^{iv}$. Det gælder nu først og fremmest om at undersøge, hvorledes t^{2z} forholder sig for store Værdier af r, naar t gennemløber Cirkelbuen CFA. Af (84) følger at

$$\arg t = \text{arc sin}\,(\sqrt{2}\sin\theta)$$

og

$$|t| = \sqrt{\cos 2\theta} + \sqrt{2}\cos\theta,$$

hvor

$$\sqrt{\cos 2\theta} > 0.$$

Altsaa er

$$t = (\sqrt{\cos 2\theta} + \sqrt{2}\cos\theta)\, e^{i\,\text{arc sin}\,(\sqrt{2}\sin\theta)}.$$

Heraf faas

$$t^{2z} = e^{r\lambda(\theta) + ir\mu(\theta)},$$

hvor

$$\lambda(\theta) = \cos v \log(\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta})^2 - 2\sin v\,\text{arc sin}\,(\sqrt{2}\sin\theta), \tag{89}$$

$$\mu(\theta) = \sin v \log(\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta})^2 + 2\cos v\,\text{arc sin}\,(\sqrt{2}\sin\theta). \tag{89*}$$

Ved Differentiation faas heraf

$$\lambda'(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}\sin(v+\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \qquad \lambda''(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}\cos(v-\theta)}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mu'(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}\cos(v+\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \qquad \mu''(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}\sin(v-\theta)}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

1) Lad først $\frac{3\pi}{4} > v \geqq \frac{\pi}{4}$. Differentialkvotienten $\lambda'(\theta)$ er da negativ for $\frac{\pi}{4} \geqq \theta > -\frac{\pi}{4}$.

Følgelig er $\lambda(\theta)$ en aftagende Funktion af θ, og da

$$\lambda\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \mp\pi \sin v,$$

saa har man

$$-\pi \sin v < \lambda(\theta) < \pi \sin v \quad \text{for} \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}. \tag{90}$$

Hvis η betegner et positivt Tal, saa kan man altsaa finde et positivt Tal ε_1 saaledes at

$$|t^{2z}| < e^{r(\pi \sin v - \varepsilon_1)} \quad \text{for} \quad -\frac{\pi}{4} + \eta < \theta \leqq \frac{\pi}{4} \tag{91}$$

$$|t^{-2z}| < e^{r(\pi \sin v - \varepsilon_1)} \quad \text{for} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{4} - \eta. \tag{91*}$$

2) Lad dernæst $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$. Differentialkvotienten $\lambda'(\theta)$ forsvinder i et og kun et Punkt i Intervallet $\frac{\pi}{4} > \theta > -\frac{\pi}{4}$ nemlig for $\theta = -v$, og dette Punkt svarer til et Maximum for $\lambda(\theta)$, idet $\lambda''(-v) < 0$. Sætter vi

$$\psi(v) = \cos v \log\left(\sqrt{2}\cos v + \sqrt{\cos 2v}\right)^2 + 2 \sin v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin v\right), \tag{92}$$

saa er altsaa

$$\lambda(\theta) \leqq \psi(v),$$

og Lighedstegnet gælder kun i et Punkt nemlig for $\theta = -v$. I Intervallet $-v < \theta < \frac{\pi}{4}$ er $\lambda(\theta)$ aftagende, og i Intervallet $-v > \theta > -\frac{\pi}{4}$ er $\lambda(\theta)$ voksende. $\lambda(\theta)$ maa altsaa i Intervallet tage sin mindste Værdi enten i $\theta = -\frac{\pi}{4}$ eller i $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Altsaa er

$$-\lambda(\theta) \leqq \pi |\sin v| < \psi(v)$$

og man har

$$|t^{-2z}| < e^{r(\psi(v) - \varepsilon_1)} \quad \text{for} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}. \tag{93}$$

I Nærheden af Punktet $\theta = -v$ har $\lambda(\theta)$ en Udvikling af Formen

$$\lambda(\theta) = \psi(v) - \frac{\sqrt{2}\,(\theta + v)^2}{\sqrt{\cos 2v}} + \ldots \tag{94}$$

og i Nærheden af Intervallets Endepunkter $\pm\frac{\pi}{4}$ finder man ved en let Regning for λ og μ følgende Rækkeudviklinger

$$\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \sin v - 4 \sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta^{\frac{3}{2}} + \ldots \tag{95}$$

$$\lambda\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\pi \sin v + 4 \sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta^{\frac{3}{2}} + \ldots \tag{95*}$$

$$\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi\cos v + 4\sin\left(v+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta^{\frac{3}{2}} + \dots \tag{96}$$

$$\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \pi\cos v + 4\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\sin\left(v+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta^{\frac{3}{2}} + \dots \tag{96*}$$

18. Efter disse indledende Bemærkninger skal vi nu undersøge, hvorledes Integralet (87) forholder sig for store Værdier af $|z|$, idet vi antager, at $\frac{3\pi}{4} \geq v \geq \frac{\pi}{4}$. Lad os sætte

$$P_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}+\eta} t^{2z}\left(\psi(\theta)-\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}, \tag{97}$$

$$P_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}-\eta}^{\frac{\pi}{4}} t^{-2z}\left(\psi(\theta)-\psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}. \tag{97*}$$

Af Ulighederne (91) og (91*) følger, at Integralet (87) kan dekomponeres paa følgende Maade

$$H_1(z) = P_1 - P_2 + O\left(e^{r(\pi\sin v - \varepsilon_1)}\right). \tag{98}$$

Det vil da være tilstrækkeligt at studere de to første Integraler, idet det sidste Led er af lavere Størrelsesorden end disse. Af (24) i Forbindelse med Hjælpesætning 4 følger at

$$\psi(\theta) - \psi\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{e^{-4i\theta}+1}\quad f(\theta) = e^{-i\theta}\sqrt{2\cos 2\theta}\; f(\theta),$$

hvor Rækken

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-4in\theta}$$

er konvergent for alle Værdier af θ. Integralerne P_1 og P_2 kan derfor skrives saaledes

$$P_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}+\eta} t^{2z} f(\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+ir\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} f\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta, \tag{99}$$

$$P_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}-\eta}^{\frac{\pi}{4}} t^{-2z} f(\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{-r\lambda\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-ir\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} f\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)d\theta. \tag{99*}$$

Ved at integrere per partes i P_1 finder man at

$$P_1 = \frac{2}{\pi} e^{r\lambda\left(\eta-\frac{\pi}{4}\right)+ir\mu\left(\eta-\frac{\pi}{4}\right)} \int_0^{\eta} f\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+ir\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} r\left(\lambda'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+i\mu'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\,d\theta.$$

Ifølge Hjælpesætning 4 er

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = 0\,.$$

Heraf og af Udviklingen (95) følger, at hvis ε er et positivt Tal, saa kan vi vælge η saa lille, at for $0<\theta<\eta$ er

$$\left|\int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\right| < \varepsilon\theta,$$

$$\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) < \pi\sin v - 4\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\lambda'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+i\mu'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{c}{\sqrt{\theta}},$$

hvor c betegner en Konstant.

Altsaa har vi

$$|P_1| < O\left(e^{r(\pi\sin v-\varepsilon_1)}\right) + \frac{2c\varepsilon r}{\pi} e^{r\pi\sin v}\int_0^{\eta} e^{-4r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta.$$

Lad nu $\eta_1>0$ og $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}+\eta_1$, da er

$$r\int_0^{\eta} e^{-4r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{1}{r^2}\int_0^{\eta r^2} e^{-4\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta < \frac{c_1}{r^2},$$

hvor c_1 er en Konstant. Følgelig har vi at

$$|P_1| = \frac{e^{r\pi\sin v}}{r^2}\varepsilon_1(r), \tag{100}$$

hvor $\varepsilon_1(r) \to 0$, naar $r \to \infty$ og det ligeligt i Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}+\eta_1$. Ved at integrere per partes i (99*) faar vi paa samme Maade at

$$|P_2| < O\left(e^{r(\pi\sin v-\varepsilon_1)}\right) + \frac{2c\varepsilon r}{\pi} e^{r\pi\sin v}\int_0^{\eta} e^{-4r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(v+\frac{\pi}{4}\right)}\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

og heraf følger at

$$|P_2| = \frac{e^{r\pi \sin v}}{r^2}\varepsilon_2(r), \tag{100*}$$

hvor $\varepsilon_2(r) \to 0$, naar $r \to \infty$ og det ligeligt i Intervallet $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$. Indsættes disse Udtryk for P_1 og P_2 i (98) ser man at

$$|H_1(re^{iv})| = \frac{e^{r\pi \sin v}}{r^2}\varepsilon(r), \tag{101}$$

hvor $\varepsilon(r)$ i Intervallet $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4} + \eta_1$ konvergerer ligeligt mod Nul, naar $r \to \infty$.

19. For Værdier af v som ligger i den umiddelbare Nærhed af $\frac{\pi}{4}$ eller $\frac{3\pi}{4}$ fører det foregaaende Ræsonnement ikke til en tilstrækkelig præcis Ulighed for $H_1(z)$. Vi maa derfor underkaste disse Værdier af v en særlig Undersøgelse. Lad os begynde med at betragte Integralet P_1, idet vi antager, at $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$. Vi skal for dette Interval aflede en Ulighed, som i Forening med Uligheden (100) giver os det ønskede Resultat. Integralet (97) kan skrives saaledes:

$$P_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + ir\mu\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \left(\psi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} d\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}.$$

Sætter man

$$\psi_1(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} e^{4ir\sqrt{\theta}\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)} \left(\psi\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) d\theta, \tag{102}$$

saa faas ved Integration per partes at

$$P_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + O\left(e^{r(\pi \sin v - \varepsilon_1)}\right), \tag{103}$$

hvor

$$Q_1 = -r\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + ir\mu\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 4ir\sqrt{\theta}\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)} \psi_1(\theta)\left[\lambda'\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i\mu'\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2i\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\theta}}\right] \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} d\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}},$$

$$Q_2 = \int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + ir\mu\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 4ir\sqrt{\theta}\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)} \psi_1(\theta) \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\cot 2\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}} d\theta,$$

$$Q_3 = -i\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + ir\mu\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 4ir\sqrt{\theta}\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)} \psi_1(\theta) \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\sin 2\theta}} d\theta.$$

Af (95) og (96) følger nu at

$$\lambda'\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i\mu'\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2i\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\theta}} = -\frac{2\sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\theta}} + O(\sqrt{\theta}).$$

Altsaa er

$$|Q_1| < r\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,|\psi_1(\theta)|\left(\frac{2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}{\theta}+O(1)\right)d\theta. \tag{104}$$

Endvidere har man

$$|Q_2| < \int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,|\psi_1(\theta)|\,\frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}}}, \tag{104*}$$

$$|Q_3| < \int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,|\psi_1(\theta)|\,\frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{2}}}. \tag{104**}$$

For at kunne undersøge disse tre Integraler skal vi i de to følgende Paragrapher aflede en Hjælpesætning, som viser hvorledes Integralet (102) forholder sig for meget store Værdier af r. Vi behandler samtidigt det med (102) analoge Integral, som frembyder sig ved Studiet af P_2.

20. Lad

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

hvor

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} a_n = 0.$$

I Paragraph 4 har vi vist, at hvis man sætter

$$f(z)=f(1)+(1-z)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\ {}^{n}$$

saa er

$$\lim_{n\to\infty} n\,b_n = 0,$$

og Rækken $\sum\limits_0^{\infty} b_n z^n$ konvergerer overalt paa Cirklen $|z|=1$. Vi skal nu vise Uligheden

$$\left|\int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}}\left(f(e^{i\theta})-f(1)\right)d\theta\right| = \frac{\theta}{r}\,o\left(\log\left(1+\frac{r}{\sqrt{\theta}}\right)\right). \tag{105}$$

Man har

$$M=\int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}}\left(f(e^{i\theta})-f(1)\right)d\theta=\int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}}\,(1-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n, \tag{106}$$

hvor

$$T_n=\int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}+in\theta}\,(1-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}\,d\theta.$$

Det er let at se hvorledes T_n forholder sig for store Værdier af r og n. Sætter vi $\theta = x^2$, saa faas

$$T_n = 2\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{irx+inx^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

$$= 2e^{-i\frac{r^2}{4n}}\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,x\,dx. \tag{107}$$

Sætter man

$$v = \frac{1}{i}\,\frac{e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx+r},$$

saa er

$$\frac{dv}{dx} = e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}\left(1+\frac{2ni}{(2nx+r)^2}\right).$$

Ved Integration per partes finder man da:

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}\left(1+\frac{2ni}{(2nx+r)^2}\right)(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,x\,dx =$$

$$= -i\,\frac{\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\,e^{in\left(\sqrt{\theta}+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{i}\int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx+r}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$+\int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx+r}(1-e^{ix^2})^{-\frac{1}{2}}\,e^{ix^2}\,x^2\,dx.$$

Heraf følger, at

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,x\,dx = -i\,\frac{\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\,e^{in\left(\sqrt{\theta}+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}$$

$$+i\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\frac{r\,dx}{(2nx+r)^2} + \int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx+r}(1-e^{ix^2})^{-\frac{1}{2}}\,e^{ix^2}\,x^2\,dx.$$

Indsætter man dette i (107), faar man

$$|T_n| < \frac{2\theta}{2n\sqrt{\theta}+r} + \int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{2rx\,dx}{(2nx+r)^2} + \int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{2x\,dx}{2nx+r}$$

$$< \frac{2\theta}{2n\sqrt{\theta}+r} + \int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{4x\,dx}{2nx+r}.$$

Men da

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{x\,dx}{2nx+r} < \sqrt{\theta}\,\frac{\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r} = \frac{\theta}{2n\sqrt{\theta}+r},$$

saa har vi hermed vist, at man kan finde en Konstant k, saaledes at

$$|T_n| < \frac{k\cdot\theta}{2n\sqrt{\theta}+r}.$$

Af (106) følger da

$$|M| < k\cdot\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{2n\sqrt{\theta}+r} = \frac{k\theta}{r}\sum_{n=1}^{\infty}|nb_n|\left(\frac{1}{n}-\frac{2\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\right).$$

Lad ε være et positivt Tal. Vi kan da finde et Tal n_0 saaledes at

$$|nb_n| < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geqq n_0.$$

Altsaa er

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|nb_n|\left(\frac{1}{n}-\frac{2\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\right) < \varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{r}{2\sqrt{\theta}}}\right)$$

$$< \varepsilon\left(\log\left(n_0+\frac{r}{2\sqrt{\theta}}\right)-\log(n_0-1)\right),$$

og Uligheden (105) er dermed bevist.

21. Lad os sætte

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},$$

hvor

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}a_n = 0.$$

Vi skal nu undersøge, hvorledes Integralet

$$M_1 = \int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}}\left(f_1(e^{i\theta})-f_1(1)\right)d\theta \tag{108}$$

forholder sig for meget store positive Værdier af r. Dette Integral er noget vanskeligere at behandle end det foregaaende. Man kan aabenbart skrive $f_1(z)$ under Formen

$$f_1(z)-f_1(1) = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^n} = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n=m}\frac{b_n}{z^n}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}, \tag{109}$$

hvor m er et vilkaarligt, helt, positivt Tal. Vi har allerede set at

$$\lim_{n \to \infty} n\, b_n = 0.$$

Lad os søge en øvre Grænse for Tallene c_n. Ved at identificere Koefficienterne til lige store Potenser af z i (109) finder man at

$$c_n = a_n - b_0 \binom{n-\frac{3}{2}}{n} - b_1 \binom{n-\frac{5}{2}}{n-1} \cdots - b_m \binom{n-m-\frac{3}{2}}{n-m}, \qquad n > m.$$

Lad ε_1 betegne et positivt Tal. Man kan finde et Tal m_0 saaledes at for $m \geqq m_0$ er

$$|\, m b_m \,| < \varepsilon_1, \qquad |\, a_m \,| < \frac{\varepsilon_1}{m^{\frac{3}{2}}}.$$

For $n > m$ har man da

$$|\, c_n \,| < \frac{\varepsilon_1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{k\, m_0}{n^{\frac{3}{2}}} + \varepsilon_1 k \sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{\nu} \frac{1}{(n-\nu)^{\frac{3}{2}}},$$

hvor k er en Konstant. Nu er

$$\sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{\nu} \frac{1}{(n-\nu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n} \sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{\nu \sqrt{n-\nu}} + \frac{1}{n} \sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{(n-\nu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Endvidere har man

$$\sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{(n-\nu)^{\frac{3}{2}}} < \int_{m_0}^{m} \frac{dx}{(n-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(n-m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n-m}} - \frac{2}{\sqrt{n-m_0}} + \frac{1}{(n-m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$< \frac{3}{\sqrt{n-m}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

og

$$\sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{\nu \sqrt{n-\nu}} < \frac{1}{\sqrt{n-m}} \sum_{\nu = m_0}^{\nu = m} \frac{1}{\nu} < \frac{\log m}{\sqrt{n-m}}.$$

Altsaa har vi vist at

$$|\, c_n \,| < \frac{\varepsilon \log m}{n \sqrt{n-m}}, \qquad n > m > m_0 \tag{110}$$

hvor ε betegner en Størrelse, der konvergerer mod Nul, naar m og dermed n vokser ud over enhver Grænse. Vi substituerer nu Udviklingen (109) i Integralet (108) og finder da

$$M_1 = \sum_{n=0}^{m} b_n T_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \int_0^{\theta} e^{i r \sqrt{\theta} - i n \theta} \, d\theta, \tag{111}$$

hvor

$$T_n = \int_0^{\theta} e^{i r \sqrt{\theta} - i n \theta} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} \, d\theta.$$

Vi skal først søge en øvre Grænse for Integralet T_n. Sætter vi $\theta = x^2$, saa faas

$$\begin{aligned} T_n &= 2 \int_0^{\sqrt{\theta}} e^{i r x - i n x^2} (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \, x \, dx \\ &= 2 e^{\frac{i r^2}{4n}} \int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \, x \, dx. \end{aligned} \tag{112}$$

Lad

$$v = \frac{1}{i} \frac{e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2}}{r - 2nx}.$$

Ved Differentiation med Hensyn til x faas

$$\frac{dv}{dx} = e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2} \left(1 - \frac{2ni}{(r - 2nx)^2}\right).$$

Hvis $n < \dfrac{r}{2\sqrt{\theta}}$ faar man ved Integration per partes:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2} \left(1 - \frac{2ni}{(r - 2nx)^2}\right) (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \, x \, dx \\ &= -i \frac{\sqrt{\theta}}{r - 2n\sqrt{\theta}} e^{-in\left(\sqrt{\theta} - \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - i \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx - r} (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &\quad + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx - r} (1 - e^{-i x^2})^{-\frac{1}{2}} e^{-i x^2} x^2 \, dx. \end{aligned}$$

Heraf følger at

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \, x \, dx &= -i \frac{\sqrt{\theta}}{r - 2n\sqrt{\theta}} e^{-in\left(\sqrt{\theta} - \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} \\ + i \int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{-i x^2})^{\frac{1}{2}} \frac{r \, dx}{(r - 2nx)^2} &- \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{e^{-in\left(x - \frac{r}{2n}\right)^2}}{r - 2nx} (1 - e^{-i x^2})^{-\frac{1}{2}} e^{-i x^2} x^2 \, dx. \end{aligned}$$

Indsætter man dette i (112) faar man

$$|T_n| < \frac{2\theta}{r - 2n\sqrt{\theta}} + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{2rx\,dx}{(r-2nx)^2} + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{2x\,dx}{r-2nx}.$$

Vi vil nu antage at

$$n \leq m < \frac{r}{4\sqrt{\theta}} + 1.$$

Af den lige fundne Ulighed følger da let, at man kan finde en Konstant k saaledes at

$$|T_n| < \frac{k\theta}{r - 2n\sqrt{\theta}}.$$

Følgelig har man

$$\left|\sum_{n=0}^{n=m} b_n T_n\right| < k\theta \sum_{n=0}^{n=m} \frac{|b_n|}{r - 2n\sqrt{\theta}}$$

$$= \frac{k\theta}{r} \sum_{n=1}^{m} |n b_n| \left(\frac{1}{n} + \frac{2\sqrt{\theta}}{r - 2n\sqrt{\theta}}\right) + k b_0 \frac{\theta}{r}.$$

Lad ε betegne et positivt Tal. Vi kan da finde et Tal n_0 saaledes at

$$|n b_n| < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq n_0.$$

Altsaa er

$$\sum_{n=n_0}^{m} |n b_n| \left(\frac{1}{n} + \frac{2\sqrt{\theta}}{r - 2n\sqrt{\theta}}\right) < \varepsilon \sum_{n=n_0}^{m} \left(\frac{1}{n} + \frac{2\sqrt{\theta}}{r - 2n\sqrt{\theta}}\right)$$

$$< \varepsilon \left(\log m + \log\left(\frac{r}{2\sqrt{\theta}} - n_0\right)\right)$$

$$< 3\varepsilon \log\left(1 + \frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right).$$

Vi kan altsaa finde en Konstant k_1 saaledes at

$$\left|\sum_{n=0}^{m} b_n T_n\right| < \varepsilon k_1 \frac{\theta}{r} \log\left(1 + \frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right). \tag{113}$$

Vi overgaar dernæst til at betragte det sidste Led paa højre Side af (111). Ved at integrere per partes finder man

$$\int_0^\theta e^{ir\sqrt{\theta}-in\theta}\,d\theta = \frac{1-e^{-in\theta+ir\sqrt{\theta}}}{in} + \frac{r}{n}\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-inx^2+irx}\,dx$$

$$= \frac{1-e^{-in\theta+ir\sqrt{\theta}}}{in} + \frac{r}{n^{\frac{3}{2}}}\,e^{i\frac{r^2}{4n}}\int_{-\frac{r}{2\sqrt{n}}}^{-\frac{r}{2\sqrt{n}}+\sqrt{n\theta}} e^{-ix^2}\,dx.$$

Man kan altsaa finde to Konstanter k_1 og k_2 saaledes at

$$\left|\int_0^\theta e^{ir\sqrt{\theta}-in\theta}\,d\theta\right| < \frac{k_1}{n} + \frac{k_2 r}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Følgelig er

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \int_0^\theta e^{ir\sqrt{\theta}-in\theta}\,d\theta\right| < k_1 \sum_{m+1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n} + k_2 r \sum_{m+1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^{\frac{2}{3}}}. \tag{114}$$

Idet vi nu benytter Uligheden (110) faar vi

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n} < \varepsilon \log m \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n-m}} = \varepsilon \log m \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^2\sqrt{n}},$$

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^{\frac{3}{2}}} < \varepsilon \log m \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{n-m}} = \varepsilon \log m \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^{\frac{5}{2}}\sqrt{n}}.$$

Men

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^2\sqrt{n}} < \int_0^\infty \frac{dx}{(x+m)^2\sqrt{x}} = \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^{\frac{5}{2}}\sqrt{n}} < \int_0^\infty \frac{dx}{(x+m)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}} = \frac{1}{m^2}\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}}.$$

Af Uligheden (114) faar jeg da

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \int_0^\theta e^{ir\sqrt{\theta}-in\theta}\,d\theta\right| < \varepsilon K_1 \frac{\log m}{m^{\frac{3}{2}}} + \varepsilon K_2 \frac{r\log m}{m^2},$$

hvor K_1 og K_2 er Konstanter. Jeg vælger nu m saaledes at

$$\frac{r}{4\sqrt{\theta}} \leq m < \frac{r}{4\sqrt{\theta}} + 1.$$

Af den sidst fundne Ulighed i Forbindelse med Uligheden (113) følger da at

$$|M_1| < \frac{\theta}{r}\varepsilon_1(r)\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)+\frac{\theta^{\frac{3}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}}\varepsilon_2(r)\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right) \tag{115}$$

hvor ε_1 og ε_2 betegner Funktioner, der konvergerer mod Nul, naar $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$.

22. Efter denne Degression vender vi nu tilbage til den i Paragraf 19 paabegyndte Undersøgelse af vort Integral P_1. I Følge (103) kan vi derved nøjes med at betragte Integralerne Q_1, Q_2 og Q_3. Vi har forudsat at $\frac{3\pi}{4}-\eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$. Vi vil nu tillige antage, at z ligger i det Omraade, der er bestemt ved Uligheden

$$r^{\frac{2}{3}}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right) \geqq c, \tag{116}$$

hvor c er en positiv Konstant. Paa Integralet (102) anvender vi den lige fundne Ulighed (115). Af Uligheden (104) afleder vi da følgende øvre Grænse for Q_1

$$|Q_1| < e^{r\pi\sin v}\varepsilon_1(r)\int_0^{\eta} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\left(2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)+\theta\cdot O(1)\right)\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)d\theta$$

$$+e^{r\pi\sin v}\frac{\varepsilon_2(r)}{\sqrt{r}}\int_0^{\eta} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\left(2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)+\theta\cdot O(1)\right)\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{4}}}.$$

Heraf faas atter

$$|Q_1| < \frac{e^{r\pi\sin v}\varepsilon_1(r)}{r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^{\eta r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} e^{-4\sqrt{\theta}}\left(2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\theta\cdot O(1)}{r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\log\left(1+\frac{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{\theta}}\right)d\theta$$

$$+\frac{e^{r\pi\sin v}\varepsilon_2(r)}{r^2\left(\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\eta r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} e^{-4\sqrt{\theta}}\left(2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\theta\cdot O(1)}{r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\log\left(1+\frac{r^2\sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{4}}}.$$

Under Benyttelse af Uligheden (116) slutter man heraf straks at

$$|Q_1| < \frac{e^{r\pi\sin v}\varepsilon(r)}{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\log\left(1+r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

hvor

$$\lim_{r\rightarrow\infty}\varepsilon(r)=0$$

og det ligelig i det betragtede Omraade af z-Planen. Vi betragter dernæst Integralet Q_2. Af Uligheden (104*) i Forbindelse med (115) følger at

$$|Q_2| < \frac{e^{r\pi \sin v}}{r} \int_0^{\eta} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} \left(\varepsilon_1(r) + \frac{\varepsilon_2(r)}{\sqrt{r}\,\theta^{\frac{1}{4}}}\right) \log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}$$

$$= \frac{e^{r\pi\sin v}}{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} \int_0^{\eta r^2 \sin^2\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} e^{-4\sqrt{\theta}} \left(\varepsilon_1(r) + \frac{\varepsilon_2(r)\sqrt{\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}}{\theta^{\frac{1}{4}}}\right) \log\left(1+\frac{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}.$$

Altsaa er

$$|Q_2| < \frac{e^{r\pi\sin v}\,\varepsilon(r)}{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)} \log\left(1+r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Endelig faar vi af Uligheden (104**) at

$$|Q_3| < e^{r\pi\sin v}\, r^{-2}\,\varepsilon(r)\log\left(1+r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Indsættes de tre her fundne øvre Grænser for Q_1, Q_2 og Q_3 i Ligningen (103) ser man at

$$|P_1| < \frac{e^{r\pi\sin v}\,\varepsilon_1(r)}{r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}\log\left(1+r^2\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right)\right), \tag{117}$$

hvor ε_1 betegner en Funktion, som konvergerer mod Nul, naar $r \to \infty$, og det ligeligt i det betragtede Omraade af z-Planen.

23. Vi overgaar dernæst til at undersøge det Omraade i z-Planen, der er beliggende inden for Vinklen $\frac{\pi}{4}+\eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}-\eta_1$ og for hvilket tillige Uligheden

$$r^{\frac{2}{3}}\sin\left|v-\frac{\pi}{4}\right| \leqq c \tag{118}$$

er opfyldt. Naar vi vælger η tilstrækkelig lille, saa er for $0 < \theta < \eta$

$$r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) < r\pi\sin v - 4\,\theta^{\frac{1}{2}}\,r\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right) - r\,\theta^{\frac{3}{2}}$$

$$< r\pi\sin v + 4\,c\,r^{\frac{1}{3}}\,\theta^{\frac{1}{2}} - r\,\theta^{\frac{3}{2}}.$$

Af Uligheden (104) faar vi da

$$|Q_1| < e^{r\pi\sin v}\left(Q_{11}+Q_{12}\right),$$

hvor

$$Q_{11} = 2r \sin \left| v - \frac{\pi}{4} \right| \int_0^\eta e^{4cr^{\frac{1}{3}}\theta^{\frac{1}{2}} - r\theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta)| \frac{d\theta}{\theta},$$

$$Q_{12} = r\,O(1) \int_0^\eta e^{4cr^{\frac{1}{3}}\theta^{\frac{1}{2}} - r\theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta)|\, d\theta.$$

Heraf finder man

$$Q_{11} = 2r \sin \left| v - \frac{\pi}{4} \right| \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta r^{-\frac{2}{3}})| \frac{d\theta}{\theta}$$

$$< 2cr^{\frac{1}{3}} \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta r^{-\frac{2}{3}})| \frac{d\theta}{\theta}.$$

$$Q_{12} = r^{\frac{1}{3}} O(1) \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta r^{-\frac{2}{3}})|\, d\theta.$$

Indfører man nu i disse to Integraler den ovenfor fundne øvre Grænse for $\psi_1(\theta)$, saa finder man efter en let Regning at

$$|Q_1| < e^{r\pi \sin v} r^{-\frac{4}{3}} (\varepsilon(r) \log(1 + r^{\frac{4}{3}}) + O(r^{-\frac{1}{3}})).$$

Af (104*) finder man dernæst

$$|Q_2| < e^{r\pi \sin v} \int_0^\eta e^{4cr^{\frac{1}{3}}\theta - r\theta^{\frac{3}{2}}} |\psi_1(\theta)| \frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}}}$$

$$< e^{r\pi \sin v} \frac{\varepsilon_1(r)}{r} \int_0^\eta e^{4cr^{\frac{1}{2}}\theta^{\frac{1}{2}} - r\theta^{\frac{3}{2}}} \log\left(1 + \frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right) \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} + e^{r\pi \sin v} O(r^{-\frac{5}{3}})$$

$$= e^{r\pi \sin v} r^{-\frac{4}{3}} \varepsilon_1(r) \int_0^\eta e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} \log\left(1 + \frac{r^{\frac{4}{3}}}{4\sqrt{\theta}}\right) \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} + e^{r\pi \sin v} O(r^{-\frac{5}{3}}).$$

Endelig ser man af Uligheden (104**) at Q_3 er af lavere Størrelse end Q_1 og Q_2. Vi har dermed vist at

$$|P_1| < e^{r\pi \sin v} r^{-\frac{4}{3}} \varepsilon_2(r) \log(1 + r^{\frac{4}{3}}), \tag{119}$$

hvor $\varepsilon_2(r)$ betegner en Funktion, som konvergerer mod Nul, naar $r \to \infty$, og det ligelig i det ved Uligheden (118) definerede Omraade af Planen. Sammenholder vi denne Ulighed med Ulighederne (117) og (100) saa ser vi at

$$|P_1| < \frac{e^{r\pi \sin v}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2v\right)}\,, \qquad \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}. \tag{120}$$

24. Det staar tilbage at betragte Integralet P_2

$$P_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{-r\lambda\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - ir\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} \left(\psi\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\,d\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}. \tag{121}$$

Vi har allerede betragtet dette Integral i Intervallet $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$ og fundet den ved Ligningen (100*) angivne øvre Grænse. For at se, hvorledes P_2 forholder sig i Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{3\pi}{4} - \eta_1$ behøver vi blot i (121) at integrere per partes og gentage hele det foregaaende Ræsonnement blot med den Forskel, at vi i Stedet for den ved (102) definerede Funktion $\psi_1(\theta)$ indfører en Funktion $\psi_2(\theta)$ defineret ved Ligningen

$$\psi_2(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} e^{-4ir\sqrt{\theta}\sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right)} \left(\psi\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) d\theta.$$

Undersøgelsen forløber nu for saa vidt noget lettere, som vi paa dette Integral kan anvende den i Paragraf 20 afledte Ulighed, medens vi ved Betragtningen af $\psi_1(\theta)$ maatte benytte den mere komplicerede Ulighed fra Paragraf 21. Men Resultatet bliver det samme som i det foregaaende Tilfælde, idet man verificerer, at P_2 ogsaa tilfredsstiller Uligheden (120) i hele det anførte Interval, og man slutter da deraf at

$$|H_1(re^{iv})| = \frac{e^{r\pi \sin v}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos v\right)}\,, \qquad \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}, \tag{122}$$

hvor $\varepsilon(r)$ betegner en Funktion, som indenfor den anførte Vinkel konvergerer ligelig mod 0, naar $r \to \infty$. Vi har desuden vist, at i det indre af Vinklen, det vil sige for $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq \frac{\pi}{4} + \eta_1$, vil

$$\lim_{r \to \infty} \varepsilon(r)\log r = 0\,,$$

og det er ikke usandsynligt, at man ved en mere dybtgaaende Analyse kan naa til at vise, at Faktoren $\log r$ i (122) helt bortfalder.

25. Af det ovenfor anførte fremgaar endnu, hvorledes $H_1(z)$ forholder sig i det indenfor Vinklen $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4} - \eta_1$ beliggende Omraade i hvilket tillige Uligheden

$$r^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \leqq c$$

er opfyldt. Vi har nemlig vist, at i dette Omraade tilfredsstiller P_1 Uligheden (119). Endvidere fremgaar det af Ræsonnementet i Paragraf 18 at

$$|P_2| < \frac{e^{r\pi \sin v}}{r^2} \varepsilon_2(r),$$

saa at P_2 i dette Omraade altsaa er forsvindende lille i Forhold til P_1. Funktionen $H_1(z)$ tilfredsstiller derfor indenfor det nævnte Omraade Uligheden

$$|H_1(re^{iv})| < \frac{e^{r\pi \sin v} \varepsilon(r) \log r}{r^{\frac{4}{3}}}. \tag{123}$$

Vi skal nu gaa over til at betragte Vinklen $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$. En nøjere Undersøgelse viser, at her kan ingen af de i det foregaaende betragtede Integraler føre til en tilstrækkelig præcis Ulighed for vor Funktion. Vi maa derfor begynde med at aflede et nyt Integraludtryk, som er egnet til vort Formaal.

26. Lad os betragte den hypergeometriske Funktion

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!} \xi^{2n}. \tag{124}$$

Denne Funktion er regulær i Punktet $\xi = 0$, og den har ingen andre singulære Punkter i endelig Afstand end Punkterne $\xi = \pm i$. Man har derfor

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2)\frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} = \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor Integrationsvejen er en i positiv Omløbsretning gennemløbet Cirkel med Centrum i $\xi = 0$ og med en Radius som er mindre end 1. I Nærheden af de singulære Punkter $\xi = \pm i$ er vor Funktion af Formen

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) = \varphi_0(\xi)\log(1-\xi^2) + \varphi_1(\xi), \tag{125}$$

hvor $\varphi_0(\xi)$ og $\varphi_1(\xi)$ betegner Funktioner, som er regulære i Punkterne $\xi = \pm i$. Man kan derfor deformere Integrationsvejen til en lukket Kurve, som gaar igennem Punkterne $+i$ og $-i$. Da endvidere Funktionen under Integraltegnet ikke ændres, naar man erstatter ξ med $-\xi$, saa har man at

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-i}^{+i} F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2)\frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} = \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!} \tag{126}$$

og man kan her tage som Integrationslinie en Cirkelbue ABC, som forbinder Punktet $-i$ med Punktet $+i$, og som har Centrum paa de positive Tals Axe og er beliggende udenfor Eenhedscirklen ADC.

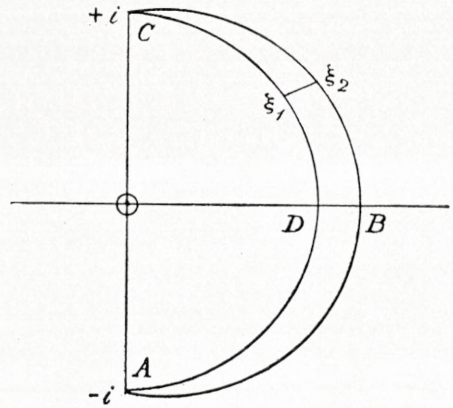

Fig. 6.

I Paragraf 7 har vi set, at vor Funktion $H_1(z)$ kan fremstilles ved en Række af Formen

$$H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta n}{(n!)^2} z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-(n-1)^2),$$

hvor

$$\delta_n = (-1)^n \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu$$

og følgelig

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0.$$

Sætter vi

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} \xi^{-2n+1},$$

Saa er $\psi(\xi)$ altsaa regulær uden for Cirklen $|\xi| = 1$, og man har

$$\lim_{\xi \to \pm i} \frac{\psi(\xi)}{\log(1+\xi^2)} = 0$$

ved Tilnærmelse til Punkterne $\pm i$ langs med Cirkelbuen ABC. Under Benyttelse af (126) finder man derfor ved ledvis Integration at

$$H_1(z) = \frac{z}{\pi i} \int_{-i}^{+i} F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2)\, \psi(\xi)\, d\xi, \tag{128}$$

hvor vi som Integrationsvej tænker os valgt Cirkelbuen ABC. Dette Integral er aabenbart konvergent for alle Værdier af z. Vi skal nu heraf aflede en Majorantværdi for $H_1(z)$ under Antagelse af, at $\frac{\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4} + \eta_1$. Lad ξ_1 betegne et Punkt paa Cirkelbuen ADC og ξ_2 et Punkt paa Cirkelbuen ABC. I Integralet (128) kan vi til Integrationsvejen føje den to Gange i modsat Retning gennemløbne Linie fra ξ_2 til ξ_1, idet $\int_{\xi_1}^{\xi_2}$ er konvergent, fordi $\psi(\xi)$ højst bliver uendelig af logarithmisk Orden i Punktet ξ_1, og den hypergeometriske Funktion F er regulær i dette Punkt. Sætter vi nu

$$\psi_1(\xi) = \int_i^{\xi} \xi^{2\alpha-2} \psi(\xi)\, d\xi\,, \tag{129}$$

$$\psi_2(\xi) = \int_{-i}^{\xi} \xi^{2\alpha-2} \psi(\xi)\, d\xi\,, \tag{129*}$$

$$u = \xi^{2-2\alpha} F(1+z,\, 1-z,\, 2;\, -\xi^2)\,, \tag{130}$$

hvor α er et positivt Tal, som vi senere skal disponere over, saa kan Ligningen (128) skrives saaledes

$$H_1(z) = \frac{z}{\pi i}\int_{\xi_1}^{i} u(\xi)\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} + \frac{z}{\pi i}\int_{-i}^{\xi_1} u(\xi)\frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi}\, d\xi\,.$$

Ved at integrere per partes i begge disse Integraler finder man

$$H_1(z) = \frac{z}{\pi i} u(\xi_1)\, \psi_2(i) - \frac{z}{\pi i}\int_{\xi_1}^{i} \psi_1(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\, d\xi - \frac{z}{\pi i}\int_{-i}^{\xi_1} \psi_2(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\, d\xi\,, \tag{131}$$

idet i Følge (125)

$$\lim_{\xi \Rightarrow i} u(\xi)\, \psi_1(\xi) = 0\,,$$

$$\lim_{\xi \Rightarrow -i} u(\xi)\, \psi_2(\xi) = 0$$

ved Tilnærmelse langs med Integrationsvejen. Man har nu

$$\psi_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)} \left(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{\pi i \alpha}\right), \tag{132}$$

$$\psi_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)} \left(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{-\pi i \alpha}\right), \tag{133}$$

hvis α ikke er hel; og hvis α er et helt Tal, har man

$$\psi_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)} \left(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{\pi i \alpha}\right) + \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \log\left(\frac{\xi}{i}\right), \tag{132*}$$

$$\psi_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)} \left(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{-\pi i \alpha}\right) + \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \log(\xi i)\,, \tag{133*}$$

hvor Akcenten betyder, at det til $n = \alpha$ svarende Led er udeladt ved Summationen.

Disse Rækker konvergerer ligelig paa Cirklen $|\xi| = 1$. Vi kan derfor i begge Integraler paa højre Side af (131) trække Integrationsvejen sammen til Enhedscirklen. For nu at se, hvorledes disse Integraler forholder sig for meget store Værdier af $|z|$, maa vi først undersøge, hvorledes de sidst anførte Rækker forholder sig for store positive Værdier af α, naar $|\xi| = 1$.

27. Hvis $x > 1$ har man

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{x+n} < \int_{x-1}^{x+p} \frac{dz}{z} = \log(x+p) - \log(x-1)\,,$$

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{x+n} > \int_{x}^{x+p+1} \frac{dz}{z} = \log(x+p+1) - \log x\,;$$

altsaa er for $y > x > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{y+n}\right) < \log y - \log(x-1).$$

Lad $[\alpha]$ betegne det største hele Tal som er $\leqq \alpha$, og lad os betragte Rækken (132). Man har

$$\left|\sum_{n=1}^{[\alpha]-1}\right| < \sum_{n=1}^{[\alpha]-1} \frac{|\delta_n|}{n(\alpha-n)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{[\alpha]-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) |\delta_n|\,,$$

$$\left|\sum_{n=[\alpha]+2}^{\infty}\right| < \sum_{n=[\alpha]+2}^{\infty} \frac{|\delta_n|}{n(n-\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=[\alpha]+2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n}\right) |\delta_n|\,.$$

Lad ε betegne et positivt Tal. Man kan finde et Tal n_0 saaledes, at

$$|\delta_n| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{for} \quad n \geqq n_0\,.$$

Af de ovenstaaende Uligheder følger da, at

$$\sum_{n=n_0}^{[\alpha]-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) |\delta_n| < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=n_0}^{[\alpha]-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) < \frac{\varepsilon}{4} \big(\log \alpha - \log n_0 + \log(\alpha - n_0) - \log(\alpha - [\alpha])\big)\,,$$

$$\sum_{[\alpha]+2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n}\right) |\delta_n| < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{[\alpha]+2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{\varepsilon}{4} \big(\log([\alpha]+2) - \log([\alpha] - \alpha + 1)\big)\,.$$

Men heraf følger, at for tilstrækkelig store Værdier af α er

$$|\psi_i(\xi)| < \frac{\xi}{\alpha} \log \alpha\,, \quad (i = 1{,}2). \tag{134}$$

28. Differentierer vi med Hensyn til ξ i (130), saa faar vi

$$\frac{du}{d\xi} = 2\xi^{1-2\alpha}\left[(1-\alpha)F(1+z,1-z,2;-\xi^2) - \frac{1-z^2}{2}\xi^2 F(2+z,2-z,3;-\xi^2)\right]$$

$$= 2\xi^{1-2\alpha}\left[-\alpha F(1+z,1-z,2;-\xi^2) + \frac{1}{1+\xi^2}F(z,-z,1;-\xi^2)\right].$$

I Paragraf 15 har vi nu vist, at

$$F(1+z,1-z,2;-\xi^2) = \frac{1}{2z\sqrt{\pi}}\xi^{-\frac{3}{2}}(1+\xi^2)^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{t^{2z}}{\sqrt{z}} - \frac{t^{-2z}}{\sqrt{-z}}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

$$F(z,-z,1;-\xi^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\xi^{-\frac{1}{2}}(1+\xi^2)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t^{2z}}{\sqrt{z}} - \frac{t^{-2z}}{\sqrt{-z}}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

hvor

$$t = \xi + \sqrt{1+\xi^2}, \qquad t - \frac{1}{t} = 2\xi.$$

Substituerer vi disse Værdier for de hypergeometriske Funktioner i Udtrykket for $\frac{du}{d\xi}$ finder vi

$$\frac{du}{d\xi} = \alpha\frac{t^{2z}}{z\sqrt{\pi z}}\xi^{-2\alpha}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}}\left[-\sqrt{\xi+\frac{1}{\xi}} + \frac{z}{\alpha}\sqrt{\xi}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$
$$+\alpha\frac{t^{-2z}}{z\sqrt{-\pi z}}\xi^{-2\alpha}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}}\left[\sqrt{\xi+\frac{1}{\xi}} + \frac{z}{\alpha}\sqrt{\xi}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \tag{135}$$

Vi sætter som hidtil

$$z = re^{iv}, \quad \xi = e^{2i\theta}, \quad |t^{2z}| = e^{r\lambda(\theta)}$$

og vi har at integrere med Hensyn til θ over Intervallet $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$. Af det i Paragraf 17 anførte fremgaar nu, [1]) at vi i (135) kan se bort fra det sidste Led, idet dette paa Grund af Uligheden (93) er forsvindende lille i Forhold til det første Led; [2]) at $\lambda(\theta)$ har et Maximum i Punktet $\theta = -v$, saa at vi ved Betragtning af vort Integral blot behøver at tage Hensyn til den Del af Integralet, som er udstrakt over Intervallet $-v-\eta \leq \theta \leq -v+\eta$, idet den resterende Del af Integralet er forsvindende lille i Forhold til dette Integralelement. Vi tænker os herved Tallet ξ_1

$$\xi_1 = e^{2i\theta_1}$$

valgt saaledes, at θ_1 falder uden for det nævnte Interval. Af (135) faar vi da

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right| < \frac{\alpha}{r\sqrt{\pi r}}e^{r\lambda(\theta)}(2\cos 2\theta)^{-\frac{3}{4}}\left|-\sqrt{2\cos 2\theta} + \frac{r}{\alpha}e^{i(v+\theta)}\right|\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Da vi som nævnt kan nøjes med at betragte Intervallet $-\eta \leqq \theta + v \leqq \eta$, saa vil det nu være indiceret at vælge det positive Tal α paa følgende Maade

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2v}}.$$

Man har da

$$-\sqrt{2\cos 2\theta}+\frac{r}{\alpha}e^{i(v+\theta)}=-\sqrt{2\cos 2\theta}+\sqrt{2\cos 2v}\;e^{i(v+\theta)}$$

$$=\frac{2ie^{2iv}}{\sqrt{2\cos 2v}}(\theta+v)+O(\theta+v)^2.$$

Endvidere er

$$\lambda(\theta)=\psi(v)-\frac{2(\theta+v)^2}{\sqrt{2\cos 2v}}+\ldots$$

Vælger man η tilstrækkelig lille, saa er altsaa for $-\eta\leqq\theta+v\leqq\eta$

$$\left|-\sqrt{2\cos 2\theta}+\frac{r}{\alpha}e^{i(\theta+v)}\right|<\frac{|\theta+v|}{\sqrt{2\cos 2v}},$$

$$\lambda(\theta)<\psi(v)-\frac{(\theta+v)^2}{\sqrt{2\cos 2v}},$$

og jeg kan finde en Konstant c, saaledes at

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right|<\frac{c}{\sqrt{r}}e^{r\psi(v)-\frac{r(\theta+v)^2}{\sqrt{2\cos 2v}}}|\theta+v|.$$

Af (131) følger da at

$$|H_1(re^{iv})|<\frac{\varepsilon_1(r)\log r}{\sqrt{r}}e^{r\psi(v)}\int_{-v-\eta}^{-v+\eta}e^{\frac{r(\theta+v)^2}{\sqrt{2\cos 2v}}}|\theta+v|\,d\theta+O(e^{r(\psi(v)-\varepsilon_2)}),$$

hvor

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon_1(r)=0.$$

Men man har nu

$$\int_{-v-\eta}^{-v+\eta}e^{-\frac{r(\theta+v)^2}{\sqrt{2\cos 2v}}}|\theta+v|\,d\theta=\int_{-\eta}^{+\eta}e^{-\frac{r\theta^2}{\sqrt{2\cos 2v}}}|\theta|\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\eta}e^{-\frac{r\theta^2}{\sqrt{2\cos 2v}}}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^{r\eta^2}e^{-\frac{x}{\sqrt{2\cos 2v}}}dx<\frac{c_1}{r},$$

hvor c_1 er en Konstant. Altsaa har vi vist at

$$|H_1(re^{iv})| < \frac{e^{r\psi(v)}\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\pi}{4} - \eta_1 \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4} + \eta_1, \tag{136}$$

hvor $\varepsilon(r)$ betegner en Funktion, som konvergerer mod Nul, naar $r \rightarrow \infty$, og det ligelig indenfor den angivne Vinkel.

29. For at fuldstændiggøre vor Undersøgelse staar det endnu tilbage at betragte det Omraade i Vinklen $\frac{\pi}{4} > v \geqq \frac{\pi}{4} - \eta_1$, hvori tillige

$$r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \geqq c.$$

Men man kan her gaa frem paa samme Maade som ved Behandlingen af det dermed symmetrisk beliggende Omraade i Vinklen $\frac{\pi}{4} + \eta_1 \geqq v > \frac{\pi}{4}$. Man behøver nemlig blot paa Integralet (128) at anvende et lignende Ræsonnement som det vi i Paragraferne 19 og 22 har anvendt paa Integralet (26). Mau finder derved indenfor det nævnte Omraade Uligheden

$$|H_1(re^{iv})| < \frac{e^{r\psi(v)}\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{3}{2}}(\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}. \tag{137}$$

Sammenholder vi nu denne Ulighed med Ulighederne (136) og (123), saa har vi vist at

$$|H_1(re^{iv})| < \frac{e^{r\psi(v)}\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}, \qquad \frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}, \tag{138}$$

hvor $\varepsilon(r)$ betegner en Funktion, som indenfor den anførte Vinkel konvergerer ligelig mod Nul, naar $r \rightarrow \infty$. For Funktionen $H_2(z)$ gælder naturligvis ganske de samme Uligheder.

Vi har defineret Funktionen $\psi(v)$ i Intervallet $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$ ved Udtrykket (92). Sætter vi nu tillige

$$\psi(v) = \pi \sin v \quad \text{for} \quad \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$$

og tilføjer, at $\psi(v)$ skal være periodisk med Perioden π, saa er $\psi(v)$ dermed fastlagt for alle Værdier af v som en kontinuert og positiv Funktion af v, der tilfredsstiller Ulighederne

$$2\log(1+\sqrt{2}) \leqq \psi(v) \leqq \pi.$$

Gaar vi nu tilbage til Funktionen $F(z)$, saa har vi altsaa vist, at enhver Funktion, som kan fremstilles ved den Stirlingske Række (11), tilfredsstiller følgende fire Uligheder:

$$|F(z) - F(-z)| < \frac{e^{r\psi(v)} r^{\beta_1}\varepsilon(r)\log r}{(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}, \qquad \frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4},$$

$$|F(z) + F(-z)| < \frac{e^{r\psi(v)} r^{\beta_2}\varepsilon(r)\log r}{(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}, \qquad \frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4},$$

$$|F(z)-F(-z)| < \frac{e^{r\psi(v)} r^{\beta_1} \varepsilon(r) \log r}{1-r^{\frac{2}{3}}\cos 2v}, \qquad \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4},$$

$$|F(z)+F(-z)| < \frac{e^{r\psi(v)} r^{\beta_2} \varepsilon(r) \log r}{1-r^{\frac{2}{3}}\cos 2v}, \qquad \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4},$$

hvor $\beta_1 = \frac{2}{3}$ og $\beta_2 = \frac{5}{3}$.

Hvad angaar den Besselske Række (41) saa behøver vi blot at henholde os til det i Paragraf 8 og i Slutningen af Paragraf 14 anførte. Man ser heraf, at en Funktion $F(z)$, der kan fremstilles ved Bessels Række, tilfredstiller de samme fire Uligheder blot med den Forskel, at $\beta_1 = \frac{5}{3}$ og $\beta_2 = \frac{2}{3}$.

I Vinklerne $\frac{5\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{3\pi}{4}$ og $-\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{3\pi}{4}$ gælder der naturligvis tilsvarende Uligheder, idet $F(z) \pm F(-z)$ er henholdsvis lige eller ulige Funktioner.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling,

8de Række.

	Kr.	Øre
I, 1915—1917	10.	75.
1. **Prytz, K.** og **J. N. Nielsen:** Undersøgelser til Fremstilling af Normaler i Metersystemet, grundet paa Sammenligning med de danske Rigsprototyper for Kilogrammet og Meteren. 1915	1.	55.
2. **Rasmussen, Hans Baggesgaard:** Om Bestemmelse af Nikotin i Tobak og Tobaksextrakter. En kritisk Undersøgelse. 1916	1.	75.
3. **Christiansen, M.:** Bakterier af Tyfus-Coligruppen, forekommende i Tarmen hos sunde Spædkalve og ved disses Tarminfektioner. Sammenlignende Undersøgelser. 1916	2.	25.
4. **Juel, C.:** Die elementare Ringfläche vierter Ordnung. 1916	»	60.
5. **Zeuthen, H. G.:** Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev en rationel Videnskab. Avec un résumé en français. 1917	8.	00.
II, med 4 Tavler, 1916—1918	11.	50.
1. **Jørgensen, S. M.:** Det kemiske Syrebegrebs Udviklingshistorie indtil 1830. Efterladt Manuskript, udgivet af *Ove Jørgensen* og *S. P. L. Sørensen*. 1916	3.	45.
2. **Hansen-Ostenfeld, Carl:** De danske Farvandes Plankton i Aarene 1898—1901. Phytoplankton og Protozoer. 2. Protozoer; Organismer med usikker Stilling; Parasiter i Phytoplanktonter. Med 4 Figurgrupper og 7 Tabeller i Teksten. Avec un résumé en français. 1916	2.	75.
3. **Jensen, J. L. W. V.:** Undersøgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori. I. 1916	»	90.
4. **Pedersen, P. O.:** Om Poulsen-Buen og dens Teori. En Experimentalundersøgelse. Med 4 Tavler. 1917	2.	90.
5. **Juel, C.:** Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung. 1917	»	75.
6. **Warming, Eug.:** Om Jordudløbere. With a Résumé in English. 1918	3.	65.
III, med 14 Kort og 12 Tavler, 1917—1919	26.	00.
1. **Wesenberg-Lund, C.:** Furesøstudier. En bathymetrisk Undersøgelse af Mølleaaens Søer. Under Medvirkning af Oberst *M. J. Sand*, Mag. *J. Boye Petersen*, Fru *A. Seidelin Raunkiær* og Mag. sc. *C. M. Steenberg*. Med 7 bathymetriske Kort, 7 Vegetationskort, 8 Tavler og ca. 50 i Texten trykte Figurer. Avec un résumé en français. 1917	22.	00.
2. **Lehmann, Alfr.:** Stofskifte ved sjælelig Virksomhed. With a Résumé in English. 1918	3.	15.
3. **Kramers, H. A.:** Intensities of Spectral Lines. On the application of the Quantum Theory to the problem of the relative intensities of the components of the fine structure and of the Stark effect of the lines of the hydrogen spectrum. With 4 plates. 1919	9.	50.
IV, med 15 Tavler og 1 Kort	28.	50.
1. **Bohr, N.:** On the Quantum Theory of Line-Spectra. Part I. 1918	2.	25.
— Samme. Part. II. 1918	4.	00.
— — — III. 1922	1.	25.
2. **Warming, Eug.:** Økologiens Grundformer. Udkast til en systematisk Ordning. 1923	4.	50.
3. **Wesenberg-Lund, C.:** Contributions to the Biology of the Danish Rotifera. With 15 Plates and 18 Textfigures. 1923	21.	25.
4. **Hertzsprung, Ejnar:** Effective Wavelengths of Stars in the Pleiades from plates taken at Mount Wilson. With 4 Figures and 1 Map. 1923	4.	75.

		Kr.	Øre
	V, med 57 Tavler	46.	90.
1.	**Bjerrum, Niels** und **Kirschner, Aage:** Die Rhodanide des Goldes und das freie Rhodan. Mit einem Anhang über das Goldchlorid. 1918	3.	50.
2.	**Orla-Jensen, S.:** The lactic acid Bacteria. With 51 Plates. 1919	46.	00.
3.	**Brünnich Nielsen, K.:** Zoantharia from Senone and Paleocene Deposits in Denmark and Skaane. With 4 Plates. 1922	5.	25.
4.	**Petersen, Axel:** Bidrag til de danske Simuliers Naturhistorie. Med 2 Tavler, 53 Figurer og 1 Kort i Texten. 1924	7.	75.
	VI, med 12 Tavler	25.	70.
1.	**Christensen, Carl:** A Monograph of the genus Dryopteris. Part II. 1920	8.	25.
2.	**Lundblad, O.:** Süsswasseracarinen aus Dänemark. Mit 12 Tafeln und 34 Figuren im Text. 1920.	18.	50.
3.	**Børgesen, F.:** Contributions to the knowledge of the Vegetation of the Canary Islands (Teneriffe and Gran Canaria). With an appendix: Lichenes Teneriffenses, scripsit Edv. A. Wainio. 1924	7.	50.
	VII (under Pressen).		
1.	**Wesenberg-Lund, C.:** Contributions to the Biology of the Danish Culicidæ. With 21 Plates and 19 Figures in the text. 1920—21	29.	00.
2.	**Nørlund, N. E.:** Stirlings Interpolationsrække. 1924	4.	50.
	VIII.		
	Jessen, Knud og **Jens Lind:** Det danske Markukrudts Historie. Med 1 Oversigtsskema. 1922—23.	31.	50.